

# 連続生産型抜取検査のシステム〔I〕

谷口道興

## 1. 概要

本稿は、連続生産型抜取検査のシステムによって品質管理のメカニズムを「近似」する、というモデル化について、問題の所在を検討し、今後の問題解決の為の理論的手がかりとしたい。この種のモデルに係わる「統計的管理の問題」については1940年代初期から50年代後半にかけてH. F. Dodge [11], [12], H. M. Taylor, A. Wald, J. Wolfowitz [27] 等によって集中的な研究が行われた。その後60年代に入ってからF. S. Hillier [24], [31], G. Elfving [19], [32] は工程管理の為の有効な行動決定、すなわち最適行動の決定方式である「決定理論」の概念を導入し実証分析に取り組んでいる。また Ewan, Kemp [3], [6], [33] 等は累積和法, V—マスク法, 決定区間法そして統計的推定を基礎におく工程管理の問題を取り上げている。累積和法は、ごく最近になって開発されたものであり、これに基づく手法によれば下記の事柄が可能となる〔1〕。(i) 一連の数値の平均水準の変化の発見 (ii) そのような変化の生起点の決定 (iii) 現状平均の信頼のおける推定値 (iv) 将来の平均水準の短期的な予測。この手法は従来からの品質管理の開発と発展に伴って体系化され、一般に扱われている「管理図」に比べて、ある特性についてはその変化を迅速に見出す特殊性を持つと同時に、統計的決定および推定の問題に関しては極めて有効な手段となって来ている。さて、シュワートの管理図の長所は、観測結果が視覚的に把握可能なことであるがその反面、観測値を連として考慮しないことが欠点となっていることは否めない。このことは平均値の管理という点で鋭敏性に欠けることを意味している。この問題に関係してPage [2] は、品質管理に累積和の適用を試みた最初の論文の中で、生産工程での生産品

目の不良率の管理について考察している。彼はこの問題が2項変量の管理と関係があり、種々の値の決定区間に対して累積和法の連の長さの平均(A. R. L.)の計算方法を示している。同時にEwan と Kemp も不良率(2項変量)と不合格品の数(ポアソン変量)の両方について合格品質水準(A. Q. L.)と不合格品質水準(R. Q. L.)におけるA. R. L.の表を発表している[3]。Ewan と Kemp はまたPageの「累積和図による管理法」を修正しこれと全く同じ事をBarnardがV—マスクを用いて展開した[4]。また、GoldsmithとWhitfield [5]によれば、V—マスク法を用いる品質管理法のA. R. L.はモンテ・カルロ法によって評価され、その時、結果値は分散 $\sigma^2$ の正規分布から抜取ったものであると結論づけている。また、V—マスク法と決定区間法が同等であることを示している[6]。工程管理の問題については、Barnard [4], Duncan [7], Box と Jenkins [8]等による議論があるが、BoxとJenkinsは初めて時系列 $z_t$ に関する一般的な確率モデルを紹介し工程モデルに対して種々の自己回帰過程を考察している。同時に生産工程の管理状況に関して、停滞、趨勢、そして季節性を考慮して工程の為の適切な選択方式について最良の論議を与えている。Bather [9], [10]は工程状況に関して検査と分解修理の場合を同時に考慮した3つの決定問題を与えWINER過程に対して連続時間の中でこの問題を考察している。

さて、周知のように連続生産型抜取検査の手順はロットによる検査が不都合な場合、工程が時間に関して連続的に処理されなければならない場合に適用される。本稿では全ての検査品目は、単位時間間隔で生産されるものと仮定し、検査を実施する場合には、検査品目の品質が合格か不合格かに峻別可能なこと、工程の真の値については条件付確率変数が観測されているものと仮定してい

る。本稿は計数抜取検査および計量抜取検査の二つの場合に分類して取扱う。

## 2. 計数抜取検査に関する手順

この方式は、検査品目(製品)を合格か不合格かに分類しそれ以上の情報は検査からは得られない。抜取検査手順は常に区切りの大きさ  $1/f$  毎の製品を検査することによって製品の一部分  $f$  (一部検査で区切りの大きさに対する一個の割合) を検査する。あるいは二者択一的に、工程は大きさ  $1/f$  の各組に区切ることが出来て、そして無作為に製品が各組から抽出される(層別抽出法)か、各製品は確率  $f$  で検査される(無作為抽出法あるいは確率標本)。前者の手順は検査費用の少ないもの、後者は検査費用のかかるもの、即、時間、設備、人手を要するもの、または破壊検査になるもの特に高価な品目の破壊検査に適用して有利となる。

### 2.1 Dodge 式 CSP と MLP について

この問題に関する最初の論文は Dodge によって与えられた[11]。これは CSP—1 と呼ばれ一定の時間において不合格品を生産する確率が一定値  $P$  を持つと仮定し、即、工程が「統計的管理」の下に置かれている場合である。この方式は次の通り記述される。検査はまず連続して生産される製品を全数検査する。そして連続して  $i$  番目の製品まで検査を続け不合格品がないならばそこで全数検査を中止し  $1/f$  の各組の製品から一個の製品を選び一部検査を行う。もし一個でも不合格品が見出されるならば再び  $i$  個の合格品が引続いて得られるまで製品検査を直ちに全数検査へ戻す。以後、同様に繰り返す。この CSP—1 は不合格品が見出される場合、全数検査が自動的に実行不能であった為に Dodge と Torrey によって修正された[12]。この方式を CSP—2 と呼ぶ。この方式は不合格品が一ヶ所に集中することに対する保護を与える為に考えられたものである。これに対して、もう一つの方式は CSP—3 と呼ばれ 1 個の不合格品を見出した時、次の 4 個の製品を検査することを指定していて、もし 4 個中に 1 つ不合格品があれば全数検査へ戻る。そうでなければ CSP—2 に即して続けられる。Lieberman と Solomon [13] は不合格品の比率が小さくなる場合は検査の比率も小さくなるように異った検査水準を

導入することによって CSP—1 を拡張した。その基本的な方法は有限の抜取比率の数  $k$  を仮定している。即ち、 $f_0(=1) > f_1 > f_2 \cdots > f_k$ 。抜取比率  $f_r$  で不合格品が見出される時、抜取は比率  $f_{r-1}$  で続けられる(もし  $r=0$  ならば  $f_0$ )。もし、 $i_r$  個の合格品が抜取比率  $f_r$  で連続的に見出されるならばそれからは抜取比率は  $f_{r+1}$  (もし  $r=k$  ならば  $f_r$ ) になる。多段抜取方式(MLP)の考え方が Derman 等によって拡張されている[14]。これらの論文の中では常に  $f_k = (f_1)^k$  と仮定されている。Dodge 方式についての詳細は便覧 H 106[15] と H 107 [16] に与えられていて、我が国でも JIS Z 9008 計数連続生産型抜取検査(不良個数の場合)として 1957 年に制定されている。

Dodge は「統計的管理」という仮説を用いて一定の形式を推論している。

- (i) 平均出検品質 (AOQ)
- (ii) 平均出検品質限界 (AOQL)
- (iii) 平均検査率 (AFI)

Dodge は与えられた AOQL に対して  $i$  と  $f$  の値を求めるための図表を得ている。しかしながら、Dodge 式は  $f$  があまりにも小さすぎることが好ましくないこと、及びこうした方式を用いる際の特長を考慮しなくてはならないという点を別にすれば、方式の選択にあたってこれ以上の明瞭な指針はない。また Lieberman と Solomon は「統計的管理」の仮説を用いてこの方式のマルコフ模型を示した。マルコフ連鎖の状態は、どれでも抜取が行われる比率と観測された連続合格品の数によって定義される[13]。この状態間の遷移確率は容易に計算され、不規則で有限なマルコフ連鎖は消散することがない。従って Lieberman と Solomon は層別抽出を仮定した場合の AOQ と AFI に対する一定の形式を推論し 2 つの基準を提案した。即ち

- (i) 与えられた AOQL に対する AFI の最小化。
- (ii)  $P(d_N > N \cdot AOQL) \leq \alpha$  の場合に一定値を保つ部分的安定度。ここで  $d_N$  は  $N$  個の連続製品の中に見出された不合格品の数、 $\alpha$  は許容危険率。(ii) の基準は  $d_N$  が平均  $NP(1-AFI)$  をもつほぼポアソンに分布に従うと仮定して適用される。もし  $N$  が大きく  $P(1-AFI)$  が小さいなら

ば正規の近似法を仮定する。しかし乍ら Lieberman と Solomon は単純抜取方式と無限水準方式だけを解析したのではない。Resnikoff は  $P$  が希望した AOQL より高い値を取り得る場合の CSP—1 の選択方法を提案し、もし  $P$  がある値  $P_0$  を指定するならば  $P_0$  において AFI を最小にすることを提案している[17]。また Murphy は AOQL の指定の他に検査者はまた「生産者の公称品質水準」(PNQL) と PNQL において要求される AFI を決定することを提案している。Guthrie と Johns は不合格品が見出される前に工程が「管理はずれ」の状態になった後で生産された期待された製品数を示す  $E(N)$  の基準を示している[34]。上記二つの方式のいずれかを選ぶ場合には、 $E(N)$  の値をより小さく取る方式が望ましい。

Lieberman は層別抜取を適用する場合、Dodge の CPS—1 によって制限されない平均出検品質限界 (UAOQL) の値を得ている。この UAOQL は管理に関する仮定なしに AOQL の値として定義されている[18]。Derman, Johns, Lieberman は種々の抜取方式に関して無作為抽出した場合の UAOQL の取る値を得ている[14]。UAOQL は AOQL に比較して「よい基準」であることが示されている。

Elfving[19] は確率標本が使用されている場合、Derman 等によって発表された MLP のもつ為の UAOQL を得ている。White[20] は一般的な Dodge 式 CSP あるいは MLP の為の UAOQL を決定する為の方法として Derman[21], [22] の結果を用いて概説している。White はその中で検査者が用いている Dodge 式 CSP と「自然のままの状態」との間に統計的管理のある工程を考えている。その工程において次の製品が不合格品か合格品かを決定する。White は UAOQL に対する解は確率標本が使用されている場合、そして層別抜取のゆえにこれらの場合に対して線型計画法を使用することによって得られることを示している。White[23] は UAOQL の計算方法を示している[20]。Hillier[24] は品質が一様でない場合の Dodge 式 CSP 選定の新しい基準 AEDL (Average Extra Defectives Limit) を導入している。工程が水準  $P_0$  (即ち  $P=P_0$ ) で稼動中、急に水準  $P_1$  へ低下するものと仮定しよう。ここで

$D$  を第  $M$  番目の製品を見出してから次の  $L$  個の製品中に不合格品を見出さない数とすれば、そこでこの AEDL は最小となる。AEDL は  $L, M, P_0, P_1$  の全ての値に対して  $E(D) \leq AEDL + L \cdot A$  ( $A$  は方式の AOQL) となる。Hillier はまた  $\alpha_1$  の種々の値に対して  $P(D \leq d) \geq \alpha_1$  の場合、 $L$  に対する  $d$  のグラフを考えることによって、予測限界の關係した方式を示している。この場合もし AEDL に対して上限が与えられるならば、そのことはある値  $f_0$  よりも大きくなるために  $f$  の値を制限する。予測限界はこの方式の必要条件を満足する最小の  $f$  を見出すために使用され得る。Anscombe は期待費用を最小に見積ることによって Dodge の CSP—1 の選定を考慮している[25]。この方式は調整検査のために計画されており工程管理の試行を考慮していない。この方式は次に述べる費用の推定を必要とする。製品の費用を費用単位  $k$  とする。検査中に発見した不合格品を合格品と交換する費用、これを費用単位  $a$  とする。然るに最終的な費用は 1 個の不合格品を通す為に損失を見込んだ  $(1+a)$  費用単位となる。さて不合格品ロットを全数検査しない場合の平均検査費用最小の抜取方式に関しては保証品質をロット許容不良率 (LTPD) で表わす場合に限られる[26]。従って

$$\bar{I} = n + (N - n) \{1 - L(\bar{P})\} \quad \dots\dots(1)$$

を最小にする抜取方式となる。ここで

- $\bar{I}$  : ロット当りの平均検査量
- $N$  : ロットの大きさ
- $n$  : 試料の大きさ
- $L(\bar{P})$  :  $\bar{P}$  の工程で生産される製品が合格となる確率

いま、 $a$  を製品 1 個当りの検査費用とすればロット当りの平均検査費用は

$$\bar{Y} = an + a(N - n) \{1 - L(\bar{P})\} \quad \dots\dots(2)$$

LTPD の値および消費者危険の大きさを同じにとれば(1)式の  $\bar{I}$  を最小にする抜取方式と(2)式の  $\bar{Y}$  を最小にする抜取方式は同等となる。さて(2)式を不合格ロットを全数選別しない場合に拡張しよう。

- $b$  : ロットが不合格となった為に生産者が受ける製品 1 個当りの損害

とすれば、 $\bar{Y}$  は

$$\bar{Y}' = an + b(N - n) \{1 - L(\bar{P})\} \quad \dots\dots(3)$$

となる。(3)式は

$$\bar{Y}'' = n + \frac{b}{a}(N-n)\{1-L(\bar{P})\} \quad \dots\dots(4)$$

と書き換えても求める抜取方式は変らない。(4)式で  $b/a$  は検査水準。

さて Dodge 式[11][12] は  $P \doteq k$  で最良。(P は不合格品が生産される確率)  $P < k$  の場合は検査をしない,  $P > k$  の場合製品毎に検査するのが最良となる。Anscombe は  $k=0.05$  を仮定している。Dodge 等による初期の方式は不合格品の検出とそれらの取替にのみ関係があった。これらは主に統計的管理という仮定に依存し明確な方式を選択する為の基準として AOQL と AFI を取扱った。その後, 方式選択の為に新しくより実際的な基準 (PNOL, AEDL, UAOQL 等) を使用した。方式はまた検査水準の増加に伴って修正され工程の品質が低下する場合は中止基準を組込んでいた[35]。Anscombe の手法によれば定数  $P$  を仮定して求めた AFI に関する公式は  $P=k$  の場合  $AFI=1/2$  が  $i$  と  $f(=1/n)$  の間の関係を求める為に使用されている。しかし乍ら  $P$  が長期間に亘って一定値を保つと仮定すれば, それは  $M$  個の製品が生産される毎におよそ 1 回大きな値  $P_1$  に飛越する。この方式において  $P$  における上の変化によって生ずる損害, これが平均推移費用である。Anscombe は種々の  $P$  と  $P_1$  の為のこの費用についての動作を検討し  $n/2M$  とした。検査費用は計算されていて  $0.3k/\sqrt{n}$  で与えられ  $P$  については一定値  $(0, 2k)$  が経験を主にして仮定されている。然るに全体の推移費用と検査費用を最小にするには  $(n/2M + 0.3k/\sqrt{n})$  を最小にする  $n$  の値を求めればよい。Anscombe の推移費用に関する理論は, マルコフ連鎖理論を用いることによって換言され得る[13]。上記の問題に関しては最近, 決定理論の導入による処理方法があり White はマルコフの決定モデルを使用して CSP の UA OQL を得ている。また Elfving はいつ工程を検査すべきか, あるいは修正すべきかを高価な製品の品質管理を考える場合に決定理論を導入している[32]。

Dodge の CSP-1 は最も早く発表されたと共に実施方法が簡明であったが, その後, 一部検査で始まる方式に Wald と Wolfwitz とによる SPA, SPB, SPC が発表された。これらは最初一

部検査で始まり, 不良個数が累計検査個数により決まった個数を越えない限り一般検査を続け, 越えると各個検査に移るものである[27]。不良率  $P_0$  のロットから逐次抜取って  $n$  個目で不合格品が  $d$  に達したとき

$$P_{0n} = P_0^d (1-P_0)^{n-d} \quad \dots\dots(5)$$

とし, 不良率  $P_1$  のロットから逐次抜取って  $n$  個目で不合格品が  $d$  個に達したとき

$$P_{1n} = P_1^d (1-P_1)^{n-d} \quad \dots\dots(6)$$

とおく。逐次確率比検定方式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{P_{1n}}{P_{0n}} < \frac{1-\beta}{\alpha} & \text{ならば検査続行} \\ \frac{P_{1n}}{P_{0n}} \geq \frac{1-\beta}{\alpha} & \text{ならばロット不合格} \\ \frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha} & \text{ならばロット合格} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

と判定することである。(5), (6), (7)式から

$$\left. \begin{aligned} -h_0 + Sn < d < h_1 + Sn & \text{検査続行} \\ d \geq h_1 + Sn & \text{ロット不合格} \\ d \leq -h_0 + Sn & \text{ロット合格} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{\log\{(1-\alpha)/\beta\}}{\log(P_1/P_0) + \log\{(1-P_0)/(1-P_1)\}} \\ h_1 &= \frac{\log\{(1-\beta)/\alpha\}}{\log(P_1/P_0) + \log\{(1-P_0)/(1-P_1)\}} \\ S &= \frac{\log\{(1-P_0)/(1-P_1)\}}{\log(P_1/P_0) + \log\{(1-P_0)/(1-P_1)\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

(対数はすべて10を底とする対数)

$$d_0 = -h_0 + Sn$$

$$d_1 = h_1 + Sn$$

がそれぞれ合格判定線, 不合格判定線をあらわす。

## 2.2 連続生産のための工程管理

Girshick と Rubin[28]は工程が安定していなくても指定した AOQL が保証可能な方式をみちびいた。これは逐次検定法の一つと云ってよい。いま  $R^*$  を次の様に定義する。  $\max_R \lim_{N \rightarrow \infty} E[I_N(R)]$  に従う  $R^*$  を最適条件あるいは Bayes と呼ぶ。即ち  $I(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[I_N(R)]$  とおけば  $I(R^*) = \max_R I(R)$ 。最適の基準  $R^*$  は次のように記述される。

$n$  個ずつに区切った製品区分の中から  $n$  分の 1

の製品を検査する場合

$$y_n = f_2(x_n) / \{(1-g)f_1(x_n)\}$$

とし、これに対して検査が行われない場合

$$y_n = \frac{1}{1-g} \quad (g \text{ は遷移確率})$$

としよう。ここに  $z_n = y_n(1+z_{n-1})$ ,  $z_0 = 0$  とする。そこで  $a^* > b^*$  なる正の常数  $a^*$ ,  $b^*$  を適当に選ぶと  $R^*$  は,  $z_n < b^*$  である限りは製品が検査されないことを定める基準となる。  $z_n \geq b^*$  で検査が始り,  $z_n < b^*$  あるいは  $z_n \geq a^*$  のどちらかになるまで検査を続行する。前者の場合は検査終了以外は生産が続き, 後者の場合は検査終了あるいは工程は修理される。ある値  $n_0$  に対しては常に  $z_{n_0} < b^*$  と記述できる。飛越されるべき製品数は完全に決定される。  $k$  を飛越されるべき製品数とすれば  $k$  は

$$z_{n_0+k} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{1-g}\right)^j + \left(\frac{1}{1-g}\right)^k z_{n_0} \geq b^*$$

を満足し、これから

$$k = \left\lceil \log \left( \frac{gb^*+1}{gz_{n_0}+1} \right) / -\log(1-g) \right\rceil$$

を得る。

Gregory[29] は Dodge の CSP に関する最適方式を, Savage[30] は生産モデルを提案した。即ち, 期待利潤を最大化するような基準を活用すること,  $P$  の 2 つの値については同一の確率モデルを仮定すること, そして Girshick と Rubin[28] が品質管理モデルで取り上げた遷移確率  $g$  を仮定すること。Savage はまた連続生産工程に中止規則の概念を組み込み不合格品が生産される確率は別の確率的方法に変換されると主張し, この場合も期待利潤を最大化する最適方式を基準にしている。この方式は,  $F$  番目毎の抽出によって製品が不合格品であることが発見された場合工程を調整する。調整後の時刻  $t$  における工程は悪い状態  $z(t)$  によって表わされる。  $z(t)$  なる状態で合格品を生産する確率は  $R \exp z(t)$  ( $0 \leq R \leq 1$ ) である。  $z(t)$  は確率変数であり母数  $\Delta t$  をもつポアソン分布をすると仮定している。また検査は破壊検査を仮定している。 Hillier[31] もまた全数検査が実際的でない場合の破壊検査について言及した。  $X(t)$  を工程状況とする。これは工程調整後  $t$  番目の製品が不合格品である確率を表わす。  $X(t)$

の平均と分散を  $\mu_t$  と  $\beta_t^2$  とする。  $M(t)$  は  $[1, t]$  において  $X(t)$  の変化の数に等しいポアソン過程とする。ここで,  $m = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $f_{M(t+1)}(m) = e^{-\theta t} (\theta t)^m / m!$ 。  $Y(t)$  は  $S=t$  で工程に変化が起ったと仮定した場合の  $X(s)$  における変化としよう。  $X(t-)$  と  $M(t-)$  は  $s \rightarrow t-$  のように  $X(s)$  と  $M(s)$  の極限を表わす。  $M(t) - M(t-) = 1$  ならば  $Y(t) = X(t) - X(t-)$ , ここで  $s \geq 1$  に対して  $0 \leq X(s) \leq 1$ 。それから

$$X(t) = \int_1^t Y(r) dM(r) + X(1).$$

また期待値と分散は, それぞれ

$$E\{Y(t)|X(t-)\} = \begin{cases} \mu \Delta P, & (X(t) < 1 - \mu \Delta P \text{ の場合}) \\ 1 - X(t-), & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

$$\text{Var}\{Y(t)|X(t-)\} = \begin{cases} \beta^2 \Delta P, & (X(t-) < 1 - \mu \Delta P \text{ の場合}) \\ 0, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と仮定される。ここで  $\mu \Delta P$  と  $\beta^2 \Delta P$  は既知とする。

方式選定の為の判定基準は期待費用を最小限度にすることである。(i) 破壊検査の費用を含めて製品検査に期待される総費用 (ii) 不合格品を除去する為の期待費用 (iii) 管理はずれの工程を調整する為に機能を改めるに必要な費用。 Hillier はこの方式が三つの限界を克服するのに努力していると述べている。それは関心のある最初の領域について合理的な近似として役立っている, 入力パラメーターはこの方式に対して満足な推定量を得る為になし得るだけの十分な意義を持っている, そしてこの方式は満足され得る解を与える。

Hillier の方式は次の事柄を指定している。

- (i) 検査をしないかあるいは一定間隔で工程を調整する
  - (ii) どれ程頻繁に検査するか
  - (iii) いつ再び検査するか
  - (iv) 工程を調整するかどうか
- (i), (ii) については費用とパラメーターに基づき (iii), (iv) は検査項目に欠陥があるかどうかに基づく。

Elfving[32] は製品検査の時期あるいは工程調整の時期の決定の為に決定方式が必要とされる高価な製品の品質管理を考える場合に決定理論を使用している。彼はまた生産工程に関する方式の選

定について工程における費用を最小限度にする判定基準を使用している。その費用は次のようなものである。品質  $i$  の製品を生産することによって被る損害；工程検査の費用；生産工程を調整する費用；彼は工程が状況  $i$  (生産工程の真の品質水準) で観測されている時、次の検査は時間単位  $di$  後に行われる、そのような判定基準を導入した。同時に  $t$  段階での状況  $i$  から状況  $j$  への遷移確率  $P_{ij}^{(t)}$  を推定することが必要である。また、真の工程の状況が観測されていて期待される損害を最小限度にする基準が見出される場合を考察している。ここで  $y(t)$  は真の状況  $x(t)$  の代りに観測されていて、 $y(t)$  は  $i$  だけによって定まる既知の分布をもつと仮定され過去に関する  $x$  と  $y$  には無関係である。即ち確率密度関数は  $f_i(y)$  である。Elfving は充足統計量がベクトル  $\{\vec{q}_i(\vec{m})\}$  であることを示しており、ここに  $\vec{q}_i(\vec{m}) = q_m(i, Y_m)$  かつ  $m$  番目の検査のあとの決定に対して

$$P[X_m = i, Y_m \in B] = \int_B g_m(i, Y) dY$$

となる。

### 3. 計量抜取検査に関する手順

連続生産が行われている工程で、通常使用されている手法は管理図である。管理図の使用法には次のようなものがある。(i) 製品の品質が異なる限度になるまで製品を分類すること、(ii) 工程に変化が起った時期を指摘し、工程の修正が決定可能であるような推定量を与えること、(iii) 品質の低下に対する理由として詳細な原因を指摘することが困難な場合に有効であること。

#### 3.1 累積和図と A. R. L.

いまや累積和を基礎にした管理法が観測値を直接プロットする管理図に取ってかわろうとしてい

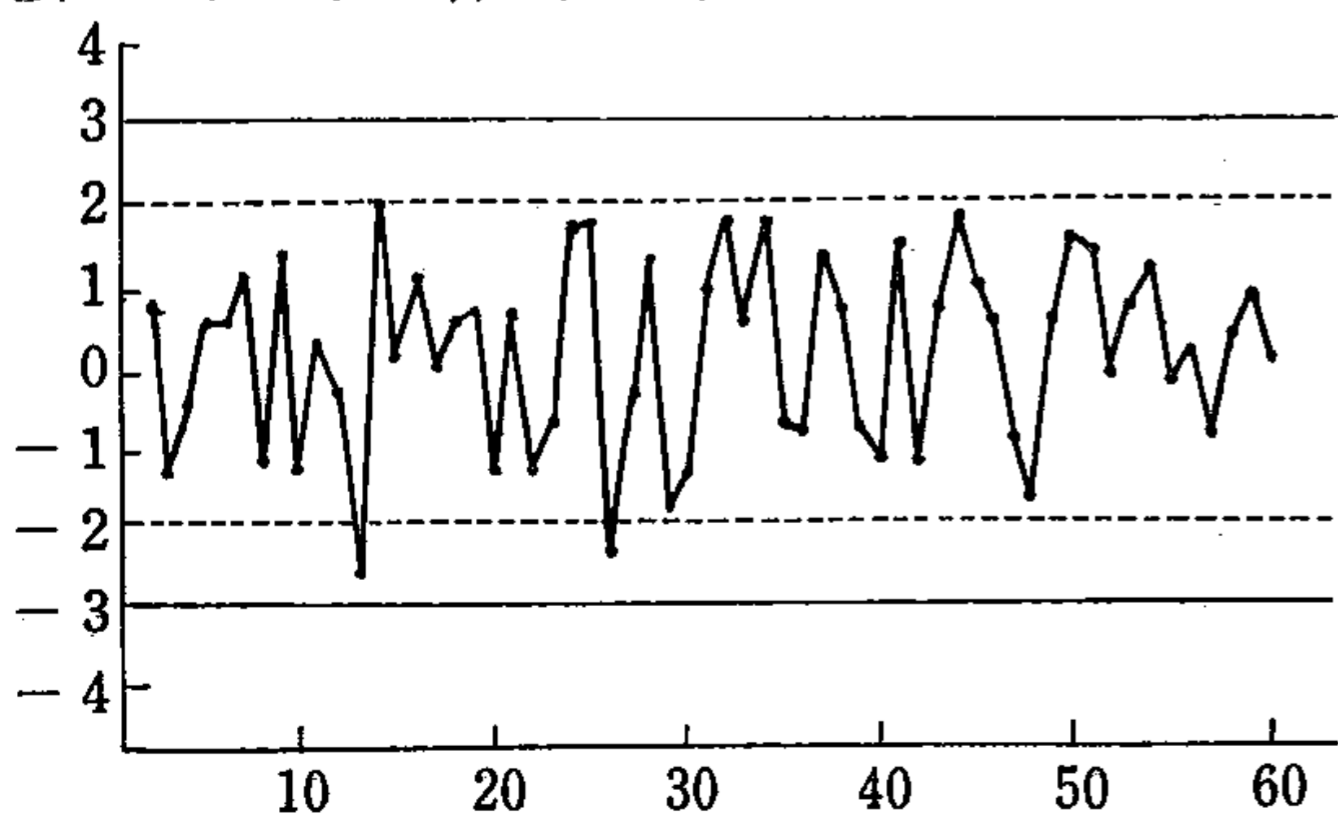


図1 処理限界と警戒限界をもつ管理図

る。然るに、累積和の用法は品質管理の分野のみならず生起順に並べられた一連の数値が与えられると、それを累積的にプロットしながら検討を加えることにより、平均水準にどのような変化が生じたか、またいつ変化が生じたかを解明できる。この種の応用に関して最初に発表したのは Page [2] であった。彼は品質管理に累積和の適用を試みた最初の論文で生産工程で生産された製品の不良率の管理について考察している。それはバッチ生産で満足すべき品目(合格品)と不合格品に点数を割り当て、不合格品の割合を管理する為に累積点数を用い、観測値に対して整数の点数を実際に与えている(合格品に対して  $a$ 、不合格品に対して  $b$ )。例えば、不良品質を処理する必要のある限界品質水準が工程に対して不良率をもつ場合、第  $k$  番目の製品に対して点数  $x_k$  を割り当てる。累積点数  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  をプロットすれば、この標本に対する判定基準は、「 $S_n - \min_{0 \leq i \leq n} S_i \geq h$  ならば処置をとれ」ということになる(図2)。この方式は、工程パラメーターで変化を検出し得ることを意味する(即ち、不合格品が生産される確率)。この方式の選定基準を知る為に(即ち、 $h$  の値) Page は A. R. L. の概念を導入した。連の長さの変均(A. R. L.)は、処置信号を発する前に管理図にプロットされる点の平均数として定義される。即ち、それは明らかに真の平均値とプロットされた点の分布に依存する。

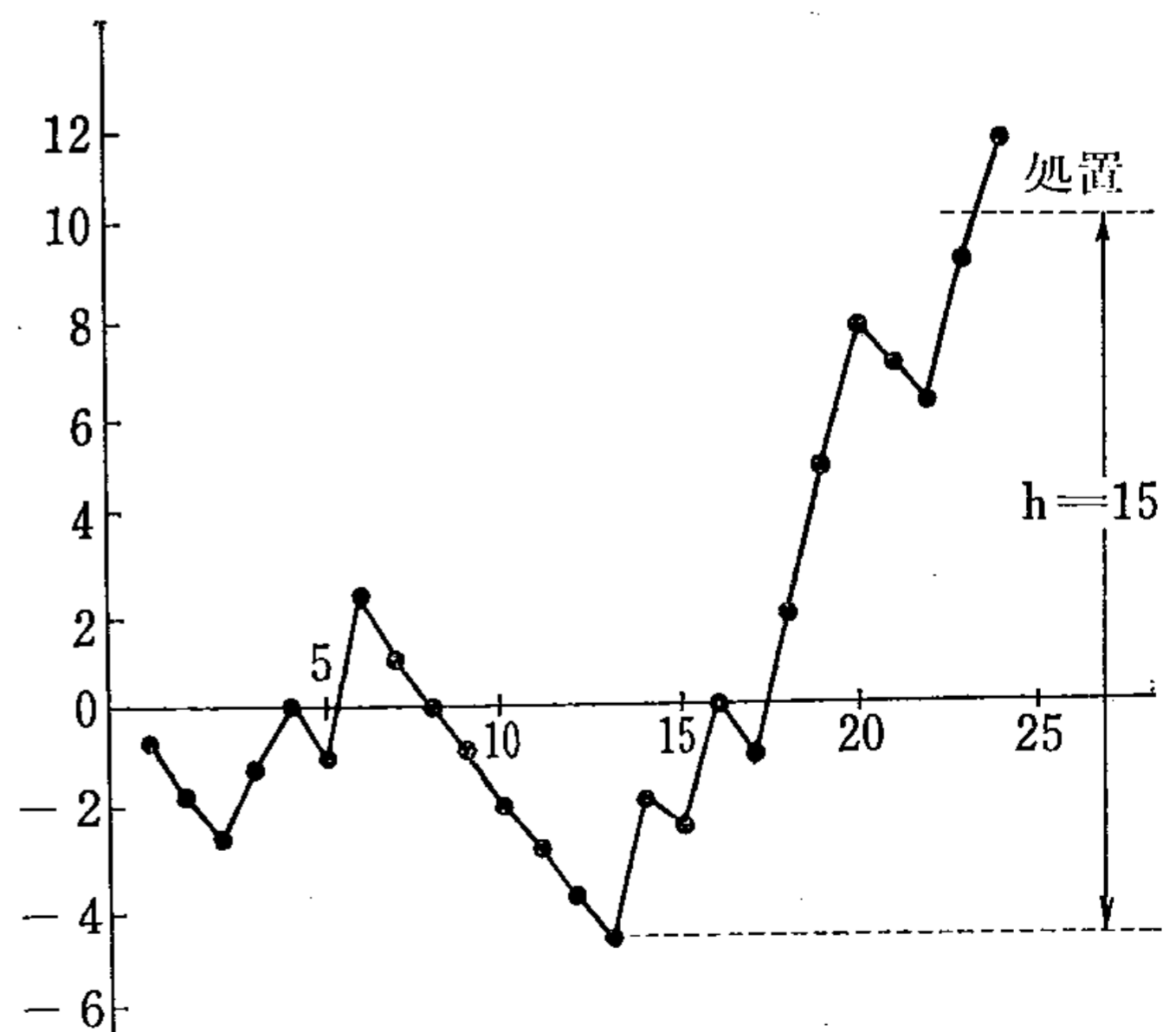


図2 Page の片側検定を説明するための累積和図。(  $a = -1$ ,  $b = 3$ ,  $h = 15$  )

連の長さの平均は、工程が目標水準にあるときには大きくなり、工程が不満足な水準にあるときは小さくなる。A. R. L. は工程パラメータの関数であり、もし抜取の割合が一定ならばこれは検査された製品数に対して比例するであろう。従って合格品に対して  $-1$ , 不合格品に対して  $b$  の点数を与える時, Page は  $h, b, p$  (不合格品が生産される確率) の値を与えて A. R. L. の表を作成している。

Ewan と Kemp は Page の方法を拡張した[3]。彼等は工程平均における変化が視覚的に検出され得る便利さから累積和図を使用しているが、これはグラフ的なものというよりも数値的なものを基礎にしたと行うことができよう。

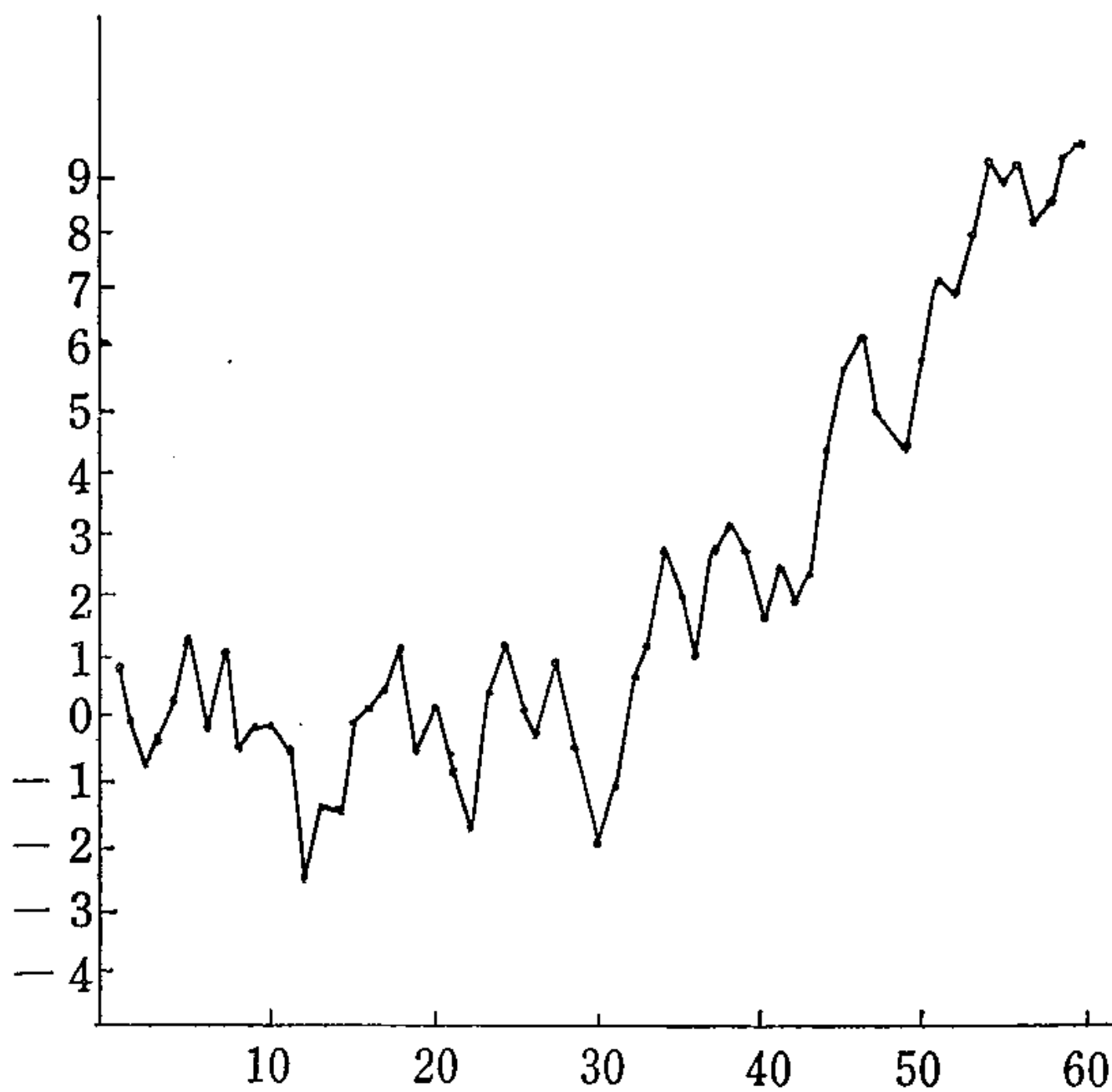


図3 図1と同じデータについての累積和図 (はじめの30個の結果の平均=0.0, つぎの30個の結果の平均=0.20)

累積和図は2個のパラメータ  $h$  と  $k$  によって指定される。ここで  $k$  (参照値) は和が作られる前に確率変数 (観測された各々の標本) から減じられる。目標から一方向の離脱のみを問題としている場合を考えよう。これは片側管理問題である。参照値をとり累積和を作る。そして平均値の増加傾向を見出す手段は、図上に最後に書き入れた点 (現状点) がこれまでの最低点よりも高いある一定量  $h$  (決定区間) よりも上部にあれば処置をとる。もし最後の結果が新しく最小となる累積和を作り出しても、その結果は決定に関して全然役立つものではない。これに対して、最も新しい



図4 図3と同じデータについての決定区間法

結果が累積和を増加させているならば、その増加量を測定することが必要であり、そして決定区間を越えるまで、あるいはその累積和が新しい最小値となるまで測定し続けることを必要とする。

次に述べる仮定が A. R. L. の計算で得られる。 $P(z)$  は点  $z$  における確率で検査は下限上で下限の端から始まる。 $N(z)$  は平均検査個数であり  $L(z)$  は最初の累積が下限からの点  $z$  で始る方式の A. R. L. である。その後の累積はこの限界を基にして始る。そこでもし管理下にある変数  $x$  が連続であるならば、 $P(z), N(z), L(z)$  は Page[2] によって既に記述されている積分方程式を満足させる。 $f(x)$  を  $x$  のとる確率とすれば

$$F(\alpha) = \sum_0^{\alpha} f(x)$$

それから

$$P(z) = F(k-z) + \sum_{y=1}^{y=h-1} P(y) f(y+k-z)$$

$$N(z) = 1 + \sum_{y=1}^{y=h-1} N(y) f(y+k-z)$$

$$L(z) = 1 + L(0)F(k-z)$$

$$+ \sum_{y=1}^{y=h-1} L(y) f(y+k-z)$$

Kemp[33] によれば与えられた方程式  $P(z), N(z)$  の近似解を得る為の方法が、 $x$  が正規分布の場合には連続および離散変量の両方について容易に一般化され得る。 $x$  の平均を  $m$  とする。

(i) 連続変数の場合

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx,$$

$$M(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} x f(x) dx,$$

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{wx} f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x) dx = e^{uk}.$$

(ii) 離散変量の場合

$$F(\alpha) = \sum_0^{\alpha} f(x), \quad M(\alpha) = \sum_0^{\alpha} x f(x)$$

$$G(\alpha) = \sum_0^{\alpha} e^{wx} f(x), \quad \sum_0^{\infty} e^{wx} f(x) = e^{wk}.$$

ここで (i), (ii) とともに  $w$  は方程式の 0 でない実根,  $f(x)$  は  $x$  の確率密度関数である。ここで, Ewan と Kemp は連続変量あるいは整数値  $h$  と  $k$  を取る離散変量に対しての  $P(0)$ ,  $N(0)$  の近似値を得ている。即ち,

$$P(0) \doteq \frac{\begin{vmatrix} F(h) & K_2 \\ F(k-h) & K_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{vmatrix}},$$

$$N(0) \doteq \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & K_2 \\ \beta_2 & K_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{vmatrix}}$$

ここで

$$K_1 = 1 + \{[F(h+k)^* - F(k)]e^{wh} - e^{-wh}[G(h+k)^* - G(k)]\} / (1 - e^{wh})$$

$$K_2 = \{e^{-wk}[G(h+k)^* - G(k)] - [F(h+k)^* - F(k)]\} / (1 - e^{wh})$$

$$K_3 = \{F(k)^* - F(k-h) - e^{-wk} [G(k)^* - G(k-h)]\} e^{wh} / (1 - e^{wh})$$

$$K_4 = 1 - \{F(k)^* - F(k-h) - e^{-w(k-h)} [G(k)^* - G(k-h)]\} / (1 - e^{wh})$$

$$\beta_1 = 1 - \{K_2 h + M(h+k)^* - M(k) - k[F(h+k)^* - F(k)]\} / (m-k)$$

$$\beta_2 = 1 - \{(1 - K_4)h + M(k)^* - M(k-h) - (k-h)[F(k)^* - F(k-h)]\} / (m-k).$$

上式において連続変量に対しては  $F(t)^* = F(t)$ , 離散変量に対しては  $F(t)^* = F(t-1)$ ;  $G(t)^*$ ,  $M(t)^*$  も同様に定義される。 $P(z)$  と  $N(z)$  の近似値が得られると

$$A.R.L. = L(0) = N(0) / \{1 - P(0)\}$$

となる。次に検査が点  $z$  で始り, 連の長さ  $n$  をもつ確率を  $P(n, z)$  で表わすと  $x$  が連続変量ならば

$$P(n, z) = P(n-1, 0)F(k-z) + \int_0^h P(n-1, y) f(y+k-z) dy$$

となる。ここで  $\phi(z, t)$  を連の長さの分布の積率

母関数とすれば

$$\phi(z, t) = \sum_1^{\infty} P(n, z) e^{nt}$$

は  $e^{-t}\phi(z, t) = 1 - F(h+k-z) + \phi(0, t)F(k-z) + \int_0^h \phi(y, t) f(y+k-z) dy$  を満足する。さて,  $n$  の大きな値と  $L(0)$  についての  $P(n, 0)$  の近似は式

$$P(n, 0) \doteq \frac{1}{L(0)} \exp\left[-\frac{n-1}{L(0)}\right]$$

によって与えられ, 連の長さ  $\alpha L(0)$  を得る確率は

$$\sum_1^{\alpha L(0)} P(n, 0) \doteq 1 - \exp\left[\frac{1}{L(0)} - \alpha\right]$$

となる。また,  $(m-k)$  と  $h$  が同符号の場合  $L(0)$  に対する近似は

$$L(0) \doteq 1 + h / (m-k)$$

となる。上式は  $(m-k)$  が 0 ではなく, かつ  $h$  が十分に大きければ  $L(0)$  の値は適度な近似値を示すだろう。Ewan と Kemp は,  $N(m, \sigma^2)$  なる母集団から大きさ  $n$  の標本をとり, 2変数  $|m-k| \sqrt{n} / \sigma$  と  $(h \sqrt{n}) / \sigma$  によって R. Q. L. と A. Q. L. における A. R. L. の値に関するノモグラムを得ている。決定区間と参照値をいろいろ組合せた決定区間法の連の長さの平均は下表のようになる。

( $\theta = m-k$ )

A. Q. L. における A. R. L.	R. Q. L. における A. R. L.	$\frac{\theta \sqrt{n}}{\sigma}$	$\frac{h \sqrt{n}}{\sigma}$
1000	3	1.12	2.40
1000	7	0.65	4.06
500	3	1.04	2.26
500	7	0.60	3.80
250	3	0.94	2.11
250	7	0.54	3.51

ここで参照値  $k \doteq \frac{1}{2}(m_a + m_r)$  が普通である。 $m_a, m_r$  はそれぞれ A. Q. L. および R. Q. L. における平均を表わす。ノモグラムの使用法は標本の大きさ  $n$  が前もって定まっているかいないかによって異なる。また Ewan と Kemp が述べているけれども標本の大きさと標本間隔の関係がほとんど線型である為に, 出来るだけ頻りに標本をとることがよい。ノモグラムは A. Q. L. と R. Q. L. における連の長さの分布に関してプロットされ



る。R. Q. L. に関する A. R. L. より小さい連の長さの確率は高く、連の長さが A. R. L. の3倍に達する確率は小さい。L(0) が大きい場合、一つの連の長さが与えられた平均値の倍数より小さくなる確率は

$$\sum_1^{\alpha L(0)} P(n, 0) \doteq 1 - e^{-\alpha}$$

から殆ど不変である。ここで  $P(n, 0)$  は連の長さ  $n$  における確率である。L(0) の大きな値に対しては、連の長さの分布はあらゆる点で L(0) によって指定される。

次に費用が考慮され  $C(n)$  が不必要な工程調査費用であるならば、そしてこの型の検査による平均費用が  $C$  を越えていけないならば L(0) と同様の

$$C = \sum_1^{\infty} \frac{C(n)}{L(0)} \exp\left[-\frac{n-1}{L(0)}\right]$$

が定義される。また Ewan と Kemp は標準偏差を管理する可能性、工程平均値と標準偏差を同時に制御する可能性について言及している。即ち、工程の平均値とその標準偏差が変動する場合、一定限界  $a$  の外側に存在する製品の百分率を管理することである。彼等は関数  $y = (a - \bar{x})/S$  を示した。ここで  $\bar{x}$  は標本平均で  $S$  は工程の標準偏差の推定値である。この関数は決定区間法によって管理されるが詳細な結論は与えられていない。

### 3.2 累積和図と V-マスク

Page [2] によって展開された概念は、その後 Ewan と Kemp [3] によって有効な改訂がなされ、これと全く同じことを Barnard [4] が V-マスクを用いて処理した。この方法は目標値からの増加・減少傾向の双方に対し、いずれの場合にも工程平均値を管理する為に適用される。V-マスクは累積和図上の最も新しい点の前方距離  $d$  のところにある。もし、式

$$S_r = \sum_{i=1}^r (x_i - \mu)$$

が観測値  $x_i$  の各値に対してプロットされるならば、その場合累積和は工程が目標値に一致している場合は、あまり横軸からそれない筈である。パラメーター  $d$  と  $\theta$  をもつ V-マスクの手法は平均値に重大な変化が起った時の検出の為に適用される (図5)。その手順は次のようである。頂角

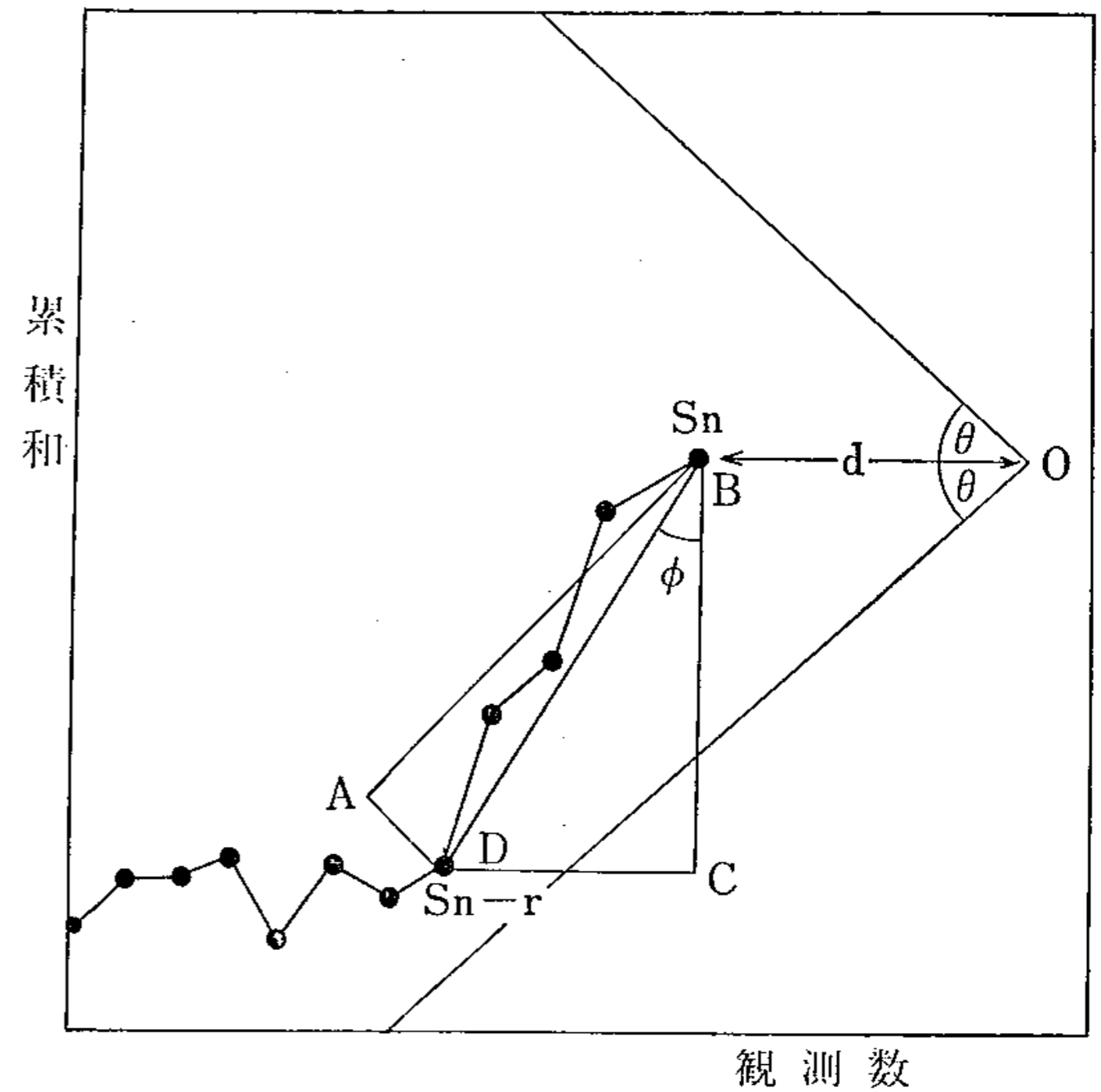


図5 V-マスクをもつ累積和

$2\theta$  をもつ V の形をしたマスクを用い、最後に記入された点の前方距離  $d$  にその頂角を置き、頂角  $2\theta$  の 2 等分線は水平線で、マスクの頂点は「前方」を示している。先にプロットされた点が全て V の内側にあれば、工程は統計的管理状態にあるとされる。パラメーター  $d$  と  $\theta$  は過去において得たデータを用いて決定する。観測値と目標値の間に  $C$  の差があるならば、それは管理の欠如を知らせていることになる。そこで

$$C = P(d+a) \tan \theta$$

としよう。ここに  $a$  は連続する 2 点間の水平距離であり、 $P$  は垂直距離を水平距離単位に変換した目盛りである。Barnard は現状工程平均を累積和図上に放物線カーサーを置くことによって推定した [4]。

Kemp [6] は累積和図上に V-マスクが用いられる場合の、連の長さの平均を考察している。 $w$  は垂直目盛を単位目盛りとして測った連続する 2 点間の水平距離とする。その場合には

$$\sum_{i=n-r+1}^n (x_i - \mu - w \tan \theta) \geq d \tan \theta$$

である様な  $r$  が存在する場合には、V-マスクの下辺は時刻  $n$  で交わり、

$$\sum_{i=n-r+1}^n (x_i - \mu - w \tan \theta) \leq -d \tan \theta$$

であれば上辺が交わる。

Kemp [6] は V-マスクと決定区間法が同等であり、パラメーターの間には

$$h = 2\sigma d \tan \theta / \sqrt{n},$$

$$k = \mu_0 + 2\sigma \tan \theta / \sqrt{n}$$

あるいは上式に相当する

$$\mu_1 - \mu_0 = 4\sigma \tan \theta / \sqrt{n}$$

の関係があることを示している。ここで、参照値  $k = w \tan \theta$ , 決定区間  $h = d \tan \theta$  として  $y_i = x_i - \mu$  と置く。また

$$S_j = \sum_{i=t}^{t+j} (y_i - k), \quad S'_l = \sum_{i=u}^{u+l} (y_i + k)$$

とする。2つの和  $S_m$  と  $S'_n$  を考える。ここで

$$0 < S_j < h \quad (0 \leq j \leq m)$$

$$-h < S'_l < 0 \quad (0 \leq l \leq n)$$

である。

もし、 $r$  番目の標本をとった直後に2つの案の累積和がそれらの境界線の内側に存在するならば  $S_m$  と  $S'_n$  は

$$m + t = u + n = r$$

ならば累積和を表わす。

さて、 $S_{m+1} \geq h$  のときは第一案によって工程は目標値からはずれていることを指摘している。よって

$$S_{m+1} = S_m + y_{m+1} - k \geq h$$

$$\therefore y_{m+1} \geq h + k - S_m.$$

第二案の累積和は

$$S'_{n+1} = S'_n + y_{m+1} + k \geq S'_n - S_m + h + 2k$$

$$= \begin{cases} S'_{t-u-1} + h + 2(m+2)k & (t > u) \\ h + 2(n+2)k & (t = u) \\ h + 2(n+2)k - S_{u-t-1} & (t < u) \end{cases}$$

従って  $S'_{n+1} > 0$ , 同様に  $S'_{n+1} \leq -h$  ならば  $S_{m+1}$  は0より小さい。

ある案の累積和が  $r$  番目の標本の直後で、その限界内に存在し他の案に対する累積が終わってしまう場合、同様の理由によって唯一つの決定限界だけが次の標本を切ることが判る。そして他の案に対する累積和は、その限界内に存在し得ない。当然の結果として、最初の案の上限で終る或いは上限を越える累積和は、そうでなければ第二の案の下限で或いは下限以下で終わっているであろう累積和には到達しない。逆もまた同じである。そこでもし  $L_1(0)$  が最初の  $L_2(0)$  が第二案の A. R. L. であるならば二つの案に対する A. R. L. は  $L(0)$  で与えられる。

ここに

$$\frac{1}{L(0)} = \frac{1}{L_1(0)} + \frac{1}{L_2(0)}$$

である。もし、V—マスクの角度が  $\theta_1$  と  $\theta_2$  である場合には上式は

$$w \sin(\theta_1 + \theta_2) > d \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

のときに正しい。種々の決定区間法に対する A. R. L. としては既に Ewan と Kemp によって求められている。  $k = \mu + w \tan \theta$  として  $h = d \tan \theta$  と置くことによってノモグラムから  $L_1(0)$  が見いだされるし  $k = \mu - w \tan \theta$ ,  $h = d \tan \theta$  とおけば  $L_2(0)$  が判る。これから  $L(0)$  が求まる。

### 3.3 V—マスク法における A. R. L. の計算法

Goldsmith と Whitfield[5] は Kemp[6] の研究を更に拡張した。種々のV—マスク法の A. R. L. は決定区間法に対する値と等しいことを示している。彼等はこれらの A. R. L. をモンテ・カルロシミュレーションによって得ている。それは、平均値が目標値から  $k\sigma$  ( $\sigma$  は標本平均の標準偏差) だけ違っている時の0から3までの  $k$  に対して、種々の  $d$  ( $=1, 2, 8$ ) と  $\tan \theta$  ( $=0.3, 0.05, 0.8$ ) に対する A. R. L. のグラフを示している。また、観測値間の一連の相関関係についても考察している。即ち

$$y_j = a y_{j-1} + (1 - a^2)^{1/2} \epsilon_j \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$x_j = k\sigma + y_j$$

ここで、 $\epsilon_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) と  $y_0$  は  $N(0, \sigma^2)$ ,  $|a| \leq 1$  である。共分散は  $C(y_r, y_{r-s}) = \sigma^2 a^s$  で相関関数は  $\rho(y_r, y_{r-s}) = a^s$  ( $s=0, 1, 2, \dots, r$ ) である。 $a=0$  の場合、上の様な独立な観測値をもつ。 $a=1$  の場合、 $x_j = k\sigma + y_0$  (すべての  $j$  に対して)  $S_n = n(k\sigma + y_0)$  とそれからその A. R. L. が定義される。

$a=-1$  のとき、

$$x_{2j-1} = k\sigma - y_0; \quad x_{2j} = k\sigma + y_0; \quad S_{2n-1} = (2n-1)k\sigma - y_0, \quad S_{2n} = 2nk\sigma.$$

ここで現状平均の偏差が  $\tan \theta$  より小さい場合 A. R. L.  $= \infty$  を与える。 $a$  に対する A. R. L. のグラフは2つの異なったV—マスクに対する種々の  $k$  に対して与えられる。グラフの中で  $a=-1$  においては不連続である。その場合、 $k\sigma > \tan \theta$  と  $d \tan \theta / k(\sigma - \tan \theta)$  は一様な整数である。

(1974. 2. 20記)

文 献

- [1] Woodward, R. H. and Goldsmith, P. L. (1964). Cumulative Sum Techniques, I. C. I. Monograph., 3. Scotland. (清水徹訳, 培風館)
- [2] Page, E. S. (1954) Continuous inspection schemes, *Biometrika.*, 41, 100—115.
- [3] Ewan, W. D. and Kemp, K. W. (1960). Sampling inspection of continuous process with no autocorrelation between successive results, *Biometrika.*, 47, 363—380.
- [4] Barnard, G. A. (1959). Control charts and stochastic process, *J. R. Statist. Soc.*, 21, 239—271.
- [5] Goldsmith, P. L. and Whitfield, H. (1961). Average run lengths in cumulative chart quality control schemes, *Technometrics.*, 3, 11—20.
- [6] Kemp, K. W. (1961). The average run length of the cumulative sum chart when a V-mask is used, *J. R. Statist. Soc.*, 23, 149—153.
- [7] Duncan, A. J. (1956). Economic design of  $\bar{x}$  charts used to maintain current control of a process, *J. Amer. Statist. Ass.*, 51, 228—242.
- [8] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1962). Some statistical aspects of adaptive optimization and control, *J. R. Statist. Soc.*, 24, 297—331.
- [9] Bather, J. A. (1963). Control charts and the minimization of costs, *J. R. Statist. Soc.*, 25, 49—70.
- [10] ————— (1966). Free boundary problems in the design of a control chart, Paper presented at the European Meeting of Statisticians., London.
- [11] Dodge, H. F. (1943). A sampling inspection plan for continuous production, *Ann. Math. Statist.*, 14, 264—279.
- [12] Dodge, H. F. and Torrey, M. N. (1951). Additional continuous sampling inspection plans, *Industr. Qual. Contr.*, 7, No. 5, 7—12.
- [13] Lieberman, G. J. and Solomon, H. (1955). Multi-level continuous sampling plans, *Ann. Math. Statist.*, 28, 398—403.
- [14] Derman, C, Littauer, S. B. and Solomon, H. (1957). Tightened multi-level continuous sampling plans, *Ann. Math. Statist.*, 28, 395—403.
- [15] OFFICE OF THE ASSISTANT SECRETARY OF DEFENSE (1958). Multi-level Continuous Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, H. 106. LONDON.
- [16] —————. (1956). Single-level Continuous Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes, H. 107. London.
- [17] Resnikoff, G. T. (1960). Minimum average fraction inspected for a continuous sampling plan, *J. Industr. Eng.*, 2, No. 3, 108—109.
- [18] Lieberman, G. T. (1953). A note on Dodge's continuous inspection plan, *Ann. Math. Statist.*, 24, 480—484.
- [19] Elfving G. (1962). The AOQL of multi-level continuous sampling plans., *Zeitwahr-scheinlichkeitsch.*, 1, 70—87.
- [20] White, L. S. (1965). Markovian decision models for the evaluation of a large class of continuous sampling inspection plans, *Ann. Math. Statist.*, 36, 1408—1420.
- [21] Derman. C. (1962). On sequential decisions and Markov chains, *Management Sci.*, 9, 16—24.
- [22] ————— (1963). Stable sequential control rules and Markov chains, *J. Math. Anal. Appl.*, 6, 257—265.
- [23] White, L. S. (1966). The evaluation of H106 continuous sampling plans under the assumption of worst conditions, *J. Amer. Statist. Ass.*, 61, 833—841.
- [24] Hillier, F. S. (1964). New criteria for selecting continuous sampling plans, *Technometrics*, 6, 161—178.
- [25] Anscombe, F. J. (1958). Rectifying inspection of continuous output, *J. Amer. Statist. Ass.*, 53, 702—714.
- [26] 松本 洋 (1973). 抜取検査実施法, 日科技連.
- [27] Wald, A. and Wolfowitz, W. (1945). Sampling inspection plans for continuous production which insure a prescribed limit on the outgoing quality, *Ann. Math. Statist.*,

- 16, 30—49.
- [28] Girschick, M. A. and Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model, *Ann. Math. Statist.*, 23, 114—125.
- [29] Gregory, G. (1956). An economic approach to the choice of C. S. P.'s, *Techn. Rept. No. 30.*, Stanford Univ.
- [30] Savage, I. R. (1959). A production model and continuous sampling plan, *J. Amer. Statist. Ass.*, 54, 231—247.
- [31] Hillier, F. S. (1964). Continuous sampling plans under destructive testing, *J. Amer. Statist. Ass.*, 59, 376—401.
- [32] Elfving, G. (1962). Quality control for expensive items, *Techn. Rept.*, 57, *Appl. Math. Stanford Univ.*
- [33] Kemp, K. W. (1958). Formulae for calculating the operating characteristics and the average sample number of some sequential tests, *J. R. Statist. Soc.*, 20, 379—386.
- [34] Guthrie, D. and Johns, M. V. (1958). Alternative sequence of sampling rates for tightened multi-level continuous sampling plans, *Techn. Rept. 36*, *Appl. Math. Stats. Lab.*, Stanford Univ.
- [35] Murphy, R. B. (1958). A criterion to limit inspection effort in continuous sampling plans. *Bell. Syst. Techn. J.*, 37, 115—134.
- [36] George, E. P. Box and M. JENKINS (1970). *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, Inc.
- [37] Ferguson, T. S. (1960). *Mathematical Statistics—A Decision Theoretic Approach*, Academic Press.
- [38] Taylor, M. H. (1965) Markovian sequential replacement process, *Ann. Math. Statist.*, 36, 1677—1694.
- [39] ————— (1967) Statistical control of a Gaussian process, *Technometrics*, 9, 29—41.