

## 連続生産型抜取検査のシステム〔II〕

谷口 道興

### 3.4 工程管理

工程管理の問題については、Duncan[7]、Barnard[4]、BoxとJenkins[41][8][36]、Bather[9][10]、Taylor[38]、GirshicとRubin[28]等による議論がある。Barnardは管理の問題を「推定問題としての管理」として考察した。それによると時間間隔ごとに $\lambda$ の割合で遷移が起こるポアソン過程を考え、各々の遷移においてはそれ自身平均0、分散 $\sigma^2$ の正規分布をなす確率変数 $\delta$ によって移動される工程平均を仮定する。時間 $t$ における工程平均を $\mu(t)$ とすれば、その工程がその工程自身に委ねられる場合にその工程平均がとる値を表わすものである。実際、時間 $t_i$ で一連の修正 $c(t_i)$ がおこなわれると、その結果として生じる工程平均は

$$\mu(t) - \sum_{t_i < t} ct(i) = \Delta t$$

となるであろう。 $\Delta t$ はその工程が現実に時間 $t$ においてなしつつある事柄を示す。目標値を0とすれば、目標値からの乖離の費用は2乗誤差

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Delta^2(t) dt$$

に比例するようになる。費用を明確化する為にランダムな分散誤差をもつ工程の観察に費用 $k$ を要するものと仮定しよう。工程平均の変化と関連する費用も存在するであろうが、差し当りそうした費用は無視して簡単な操作に限ることにする。工程平均の調整が機械を監視する操作者によるノブの回転とか、そういった簡単な操作だけを問題にする場合にはこのような費用を無視するのが適当である。このように仮定することによって管理の問題は、ある時間における $\mu(t)$ の最尤推定量を得ることに帰着する。最尤推定量は平均2乗誤差として定義され、修正 $c(t)$ はこの推定量と等

しく、符号を反対にすればその工程に適用されよう。Barnardによって得られた最適の推定量は、平均最尤推定量である指数型の加重平均であり、それは前の工程平均が一様分布であるならば、平均2乗誤差を最小にする。このように最尤推定量は、時間を遡るにつれて減少し、また継起的な観察の差異に左右される加重による近い方の観察の加重平均であることが分る。

次に費用考察の方法を用いると、検査の時期と工程調整の時期が決まる。この場合 $\lambda$ と $\sigma^2$ の値を推定することが必要である。また、工程平均は平均0、分散 $\sigma^2$ の正規分布をする確率変数として仮定し、そしてポアソン確率過程によって定義される遷移において新しい値をとる。

最適および制御方式のデザイン問題に関する一連の論文は、まずBoxとJenkins[8]、[41]によって発表された。ここでは離散パラメータの予測問題を取り扱う為に観察された時系列 $\{Z_t, t=1, 2, \dots, N\}$ を有限個の母数 $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q; \sigma^2)$ で

$$\begin{aligned} w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} \\ = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \dots \end{aligned}$$

と表現されるような線形確率モデルに当て嵌めることによって、上述の問題の解析方法を論じている。但、 $\{a_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は互に独立で平均0、分散 $\sigma^2$ の確率系列で $\{w_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は $Z_t$ の $d$ 次階差である。このモデルには、自己回帰(AR)型、自己回帰-移動平均(ARMA)型、移動平均(MA)型過程、そして彷徨過程的非定常性をもつ自己回帰-積分移動平均(ARIMA)型および積分移動平均(IMA)型過程が与えられている。さて、確率モデルを組み立てる場合の重要な点は、時系列の標本自己相関関数を検査することにより、適切な

モデルを決定することである。適切なモデルを適合させる為に、母数に対して最小2乗予測を活用することは普通であり、これらはまた、 $a_t$  が独立な正規分布であるとき、最尤推定値となる。また、季節変動に対するもっと複雑なモデルが紹介されている[42]。これらのモデルを使つてのL段階先の予測が、即ち、時間のずれLに対して、最小平均2乗予測を使うことによってなされる。時系列  $Z_t$  に関して、時間  $t$  での時間のずれLに対する最小平均2乗予測は

$$Z_t(L) = E_t(Z_{t+L})$$

によって表わすことが可能である。ここに  $E_t$  は、時間  $t$  での条件付期待値である。

たとえば、化学プラントデータに関して、入力変数  $X_t$  と出力変数  $Y_t$  を結合する動態方程式が得られる。これは、一般に  $X_t$  と  $Y_t$  間の差分方程式で表わすことが可能である[43]。

即ち、

$$(1 + \xi_1 \nabla + \dots + \xi_r \nabla^r) Y_{t+1} = a + g(1 + \eta_1 \nabla + \dots + \eta_s \nabla^s) X_{t-b}$$

然しながら、この方程式は通常説明されない変動による誤差を含んでいる為に、もし誤差項  $e_t$  が右辺に加えられるならば辛うじて正確になるであろう。もし、これらの誤差が独立で正規性をはづれたものであれば、上記方程式の係数に関する最尤推定値は、最小2乗推定値である。実際にはこの誤差項  $e_t$  はめったに独立ではない為に、確率モデルに対して自己相関関数を考慮し、そして上に与えた方法を使うことにより適切なモデルを組み立てなければならない。

次に、これらの概念を工程管理へ適用する場合について検討しよう。 $Y_t$  は  $X_t$  を調整することによって制御される変数としよう。もしもそこに攪乱がなかったならば、工程はそこで目標を維持するであろうが、一般には攪乱  $Z_t$  の為に目標からの偏差  $d_t$  が存在する。そこでもし  $X_t$  と  $Y_t$  を関係づける方程式を

$$L_1(B)(1-B)Y_{t+b+1} = gL_2(B)(1-B)X_t$$

とするならば、時間  $(t+1)$  で偏差

$$d_{t+1} = Z_{t+1} + Y_{t+1}$$

を生ずる。ここで  $L_1(B)$  と  $L_2(B)$  は  $B$  についての多項式であり、 $B$  は演算子  $BY_t = Y_{t-1}$  である。それから  $d_t, d_{t-1}, \dots$  および  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$  についての関数である  $x_t (= (1-B)X_t = X_t - X_{t-1})$  についての制御方程式を知ることが必要である。最適な制御の為に、 $X_t$  と  $Y_t$  を関係づける動態方程式に遅延があったとしても

$$Y_{t+b+1} + E_t(Z_{t+b+1}) = 0$$

即ち、

$$Y_{t+b+1} + Z_t(b+1) = 0$$

を満足する  $x_t$  を選ぶことが必要である。また進み時間  $b$  に対して予測するならば

$$Z_{t+b+1} = d_{t+b+1} + Z_t(b+1)$$

が得られる。

それから、もしも  $a_t$  が一様分布した確率変数であるならば

$$d_t = L_3(B)a_t, \\ Z_t(b+1) - Z_{t-1}(b+1) = L_4(B)a_t$$

が定義される。ここで  $L_3(B)$  および  $L_4(B)$  は  $B$  についての多項式である。これから方程式

$$(1-B)Y_{t+b+1} = -L_4(B)a_t$$

およびその最適の制御方程式

$$gL_3(B)L_2(B)x_t = -L_1(B)L_4(B)d_t$$

を得る。

次にフィードバックコントロールについて考察しよう(図6)。ここでは、 $N_t$  は観察されない攪乱のアウトプットにおける結合効果を測定し、制御行為が行なわれない場合に時間  $t$  のアウトプットに起るであろう目標からの偏差として定義される。 $N_t$  はある線型確率過程に従うものと仮定し

$$N_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t$$

あるいは

$$N_t = \{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i\} a_t$$

によって定義される。ここで、 $a_t$  は「白い雑音」過程である。

制御可能な変数とアウトプットを連結する変換関数モデルは

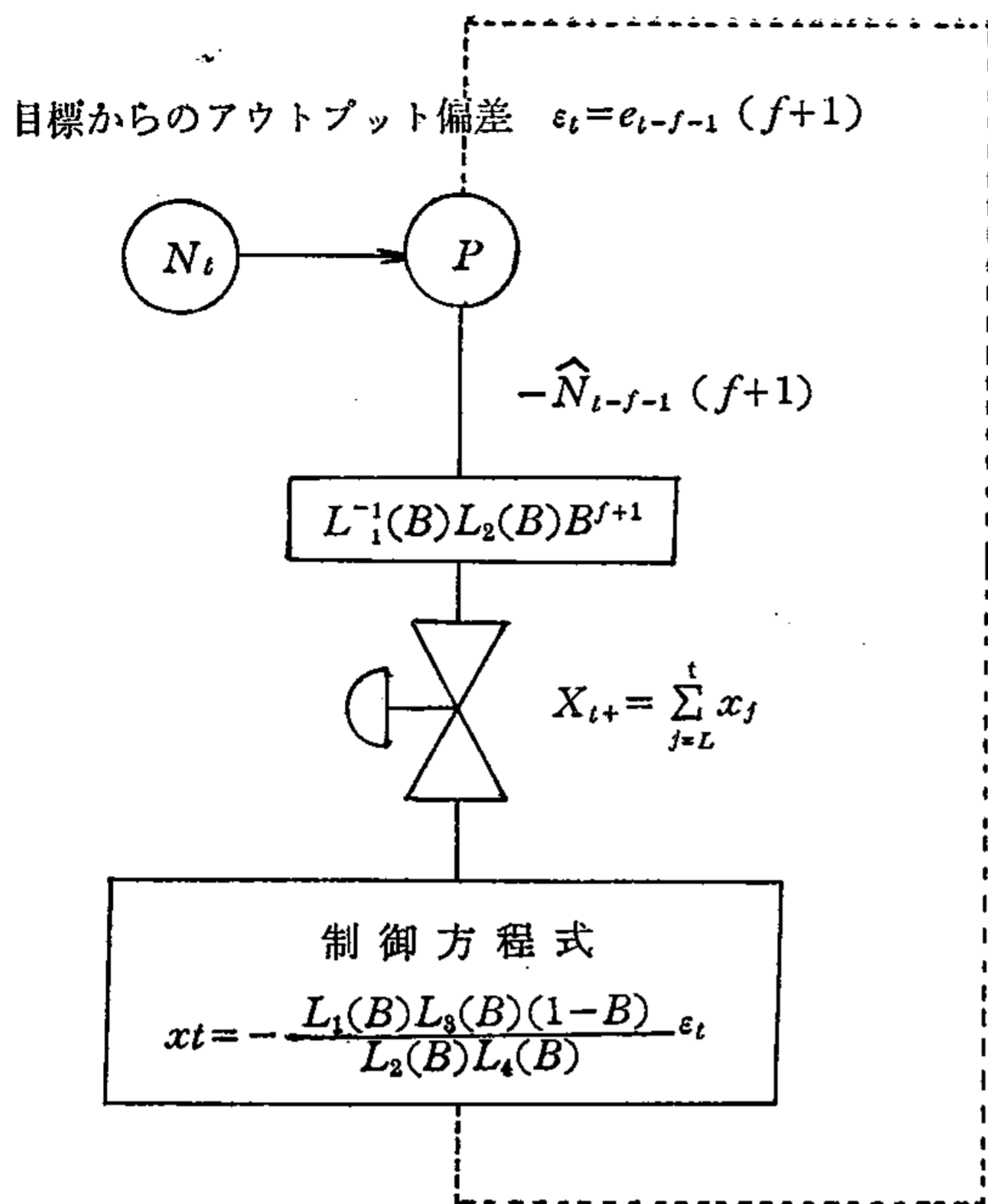


図6 時間 \$t\$ におけるフィードバックコントロール

[注] 文献 [36] 434 頁, 12. 6 図参照

$$Y_t = L_1^{-1}(B)L_2(B)B^{f+1} X_{t+}$$

時間 \$t\$ に対する点 \$P\$ においては

$$\text{攪乱の総効果} = N_t$$

$$\text{相殺の総効果} = L_1^{-1}(B)L_2(B)X_{t-f-1+}$$

アウトプット平均 2 乗誤差を最小化するフィードバックコントロール

$$X_{t+} = -L_1(B)L_2^{-1}(B)N_{t+f+1}$$

とおくことができる場合には, 攪乱効果は打ち消される。\$f+1\$ が正であるからこうしたことは起らないが

$$N_{t+f+1}$$

を予測

$$\hat{N}(f+1)$$

によって置き換えることによって, 即ち制御行為を行うことによって, 最小 2 乗平均制御誤差を得ることが出来る。即ち

$$X_{t+} = -L_1(B)L_2^{-1}(B)\hat{N}_t(f+1)$$

よって, 操作変数に加えられた変化あるいは調整は

$$x_t = -L_1(B)L_2^{-1}(B)\{\hat{N}_t(f+1)\} - \hat{N}_{t-1}(f+1)$$

この場合, 時間 \$t\$ のアウトプットの誤差は, \$N\_t\$

過程に対する進み時間 \$f+1\$ における予測誤差となる。即ち,

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= N_t - \hat{N}_{t-f-1}(f+1) \\ &= e_{t-f-1}(f+1) \end{aligned}$$

さて,

$$\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1)$$

は直ちには分らないが, 観察される誤差別

$$\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$$

から得られる。それは次のことから得られる。

$$\begin{aligned} N_{t+f+1} &= \{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i B^i\} a_{t+f+1} \\ &= \{a_{t+f+1} + \Psi_1 a_{t+f} + \dots + \Psi_f a_{t+1}\} \\ &\quad + \Psi_{f+1} a_t + \Psi_{f+2} a_{t+1} + \dots \\ &= e_t(f+1) + \hat{N}_t(f+1) \end{aligned}$$

さて, \$e\_t(f+1)\$ も \$\hat{N}\_t(f+1)\$ も共に \$a\_i (i=t+1, t+2, \dots)\$ の線型関数であるから, この方程式は

$$N_{t+f+1} = L_4(B)a_{t+f+1} + L_3(B)a_t$$

と書き換えられる。

確率過程に対して

$$N_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t = \Psi(B)a_t$$

が分れば

$$e_{t-f-1}(f+1) = L_4(B)a_t$$

$$\hat{N}_t(f+1) = L_3(B)a_t$$

従って

$$\begin{aligned} \hat{N}_t(f+1) &= \frac{L_3(B)}{L_4(B)} e_{t-f-1}(f+1) \\ &= \frac{L_3(B)}{L_4(B)} \epsilon_t \end{aligned}$$

から演算子 \$L\_3(B)\$ と \$L\_4(B)\$ が得られる。従ってアウトプットの最小平均 2 乗誤差を導くフィードバック制御方程式は

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)L_3(B)}{L_2(B)L_4(B)}\epsilon_t$$

と書かれる。

場合によっては, この方が便利であるので時間 \$t\$ になされる制御行為を調整

$$x_t = X_{t+} - X_{t-1+}$$

で定義し

$$x_t = -\frac{L_1(B)L_3(B)(1-B)}{L_2(B)L_4(B)}\varepsilon_t$$

とする。

実際、 $L_3(B)(1-B)$  の性質は、これが

$$\hat{N}_t(f+1) - \hat{N}_{t-1}(f+1) = L_3(B)(1-B)a_t$$

の形で起る演算子であることに注意すれば旨く書かれる。

次に3項コントローラーについて検討しよう。 $\varepsilon_t$  が時間  $t$  のアウトプット誤差である場合には、制御行為は  $\varepsilon_t$  そのもの、即ち時間についての  $\varepsilon_t$  の積分あるいは時間についての  $\varepsilon_t$  の微分に比例して行なわれて差し支えないので、 $X_t$  が時間  $t$  における操作変数の水準を表わす場合には制御方程式は

$$X_t = k_D \frac{d\varepsilon_t}{dt} + k_P \varepsilon_t + k_I \int \varepsilon_t dt$$

の形になる。ここで  $k_D, k_P, k_I$  は定数である。場合に応じて、これら3つの行為モデルの一つあるいは二つが用いられる。従って、簡単な比例制御 ( $k_D=0, k_I=0$ ), 簡単な積分制御 ( $k_D=0, k_P=0$ ), 比例積分制御 ( $k_D=0$ ) および比例微分制御 ( $k_I=0$ ) が考えられる。この連続的な制御方程式から、不連続なものを類推すれば

$$X_{t+} = k_D \nabla \varepsilon_t + k_P \varepsilon_t + k_I S \varepsilon_t$$

これを調整で表わせば

$$x_t = k_D \nabla^2 \varepsilon_t + k_P \nabla \varepsilon_t + k_I \varepsilon_t$$

となる。

簡単な場合の多くは、この型の項を含む制御方程式である。例えば、ノイズは  $(0, 1, 1)$  過程

$$\nabla N_t = (1-\theta B)a_t$$

で表わされ、動態が1次形

$$(1+\xi \nabla)Y_t = gX_{t-1+}$$

で表わされる場合には

$$X_{t+} = -\frac{L_1(B)L_3(B)}{L_2(B)L_4(B)}\varepsilon_t$$

は

$$X_{t+} = -\frac{(1-\theta)\xi}{g}\varepsilon_t - \frac{(1-\theta)}{g}S\varepsilon_t$$

の形になる。従って、求められる行為は比例積分制御を不連続の型に類推して得られる。

次に、攪乱  $N_t$  が3項  $(0, 1, 1)$  からなる線型モデルで表わされる場合には

$$\nabla N_t = (1-\theta B)a_t$$

で表わされ、変換関数モデルは簡単な1次式

$$Y_t = g(1+\xi \nabla)^{-1}X_{t-1+}$$

で表わされる。一般に制御調整を表わす式

$$x_t = -\frac{L_1(B)L_3(B)(1-B)}{L_2(B)L_4(B)}\varepsilon_t$$

は

$$x_t = -\frac{(1-\theta)}{g}(1+\xi \nabla)\varepsilon_t$$

となり、制御変数の set point は、

$$X_{t+} = -\left\{ \frac{(1-\theta)\xi}{g}\varepsilon_t + \frac{(1-\theta)}{g}S\varepsilon_t \right\}$$

となる。

比例積分行為は適当なプロジェクションチャート(図7)で示すのが便利である。図に示されたプロジェクションチャートは、チャート作成の一般的方法を示している。中央の目標線からの偏差は、目標からの偏差  $\varepsilon_t$  に対応する。第2の目盛りは、制御行為  $x_t$  を示しており、0行為 ( $x_t=0$ ) は目標と一致している。目盛りは  $\varepsilon_t$  の1単位が制御行為目盛りの

$$-[(1-\theta)/g]$$

に対応するようにとられている。時間  $t$  における適当な行為は、 $\xi$  時間単位だけ先に進んで  $\varepsilon_t$  と  $\varepsilon_{t-1}$  によって線に投影することによって読み取ることが出来る。このパイロット型では、 $\xi=1$  であるから1時間単位先へ進めて投影しなくてはならない。例えば、時間  $t=2$  における制御行為は次のようにして求められる。

$t=1, t=2$  の  $d$  値 ( $d$  目盛り上の値) をチャート上に求めてこれらの2点を結び、 $t=3$  の縦線との交点の座標を求め、行為目盛り ( $x$  目盛り) の数字を読めばよい。図の例では、 $t=3$  の縦線と矢印との交点の行為目盛り ( $x$  目盛り) は  $-30$  で

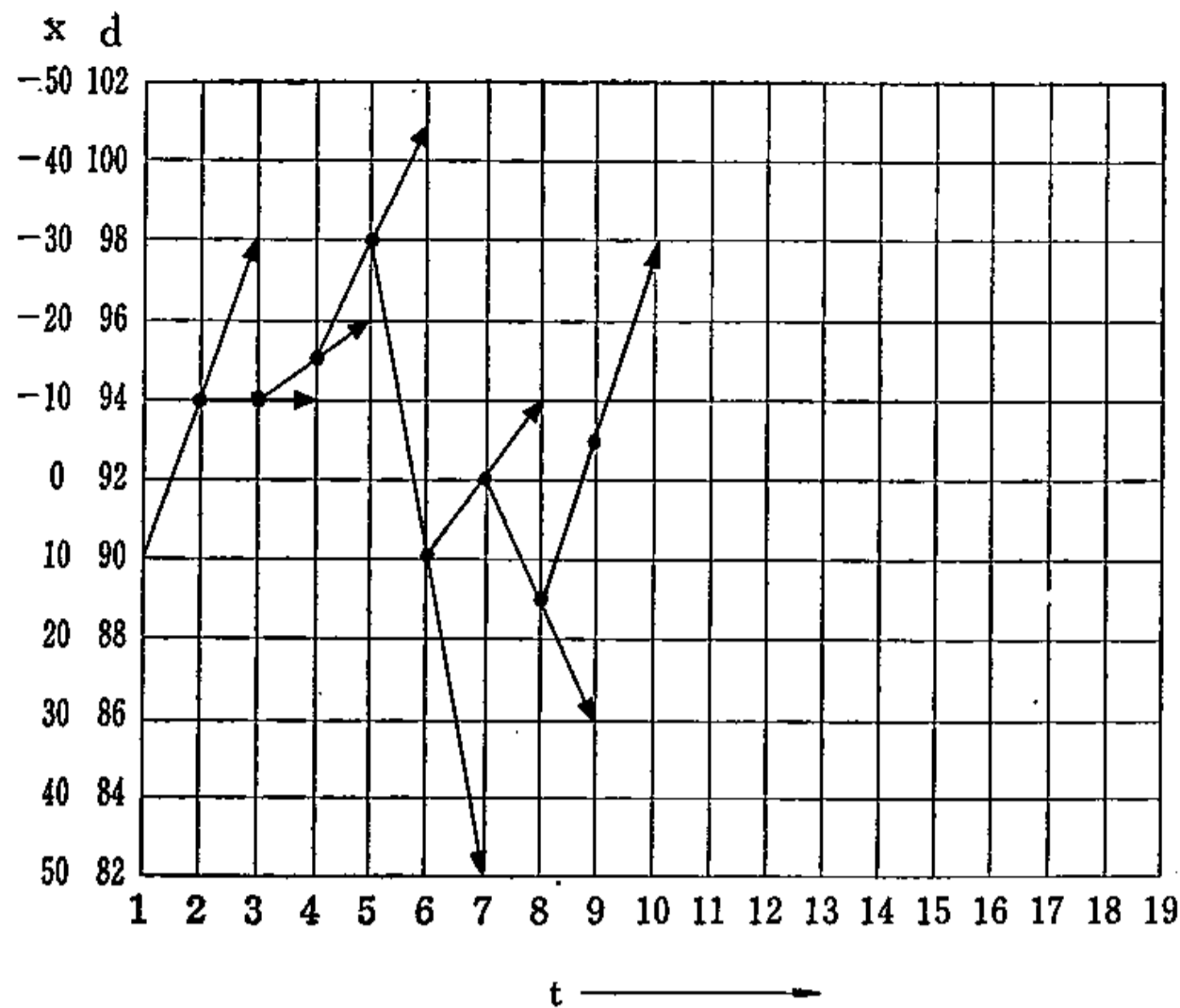


図7 プロジェクションチャート  
 [注] 文献 [36] 442 頁, 12.8 図より作成

ある。

次に、工程調整の時期を決定することが必要な状況に当て嵌る二つのモデルを分析しよう。Bather [9] は、単位時間間隔で平均水準に変化が起ることを仮定している。即ち、次の品目が生産される前に変化があると仮定している。問題はランニングコストとオーバホールコストを考慮しながら、一連の観察に基づく決定を基礎として工程調整の時期を決定することである。時間  $t$  における工程の平均水準を  $\mu_t$  で表わして、Bather は  $(u_t - \mu_{t-1})$  が平均 0、分散  $\rho^2$  の正規分布であると仮定している。次に、時間  $t$  における観察値  $x_t$  は、平均  $\mu_t$ 、分散  $\sigma^2$  の正規分布であると仮定される。次に  $t$  ( $t$  は正) に対して、 $x_1, x_2, \dots, x_t$  は流れ作業水準  $\mu_t$  を示す。 $t$  における修理の費用と次の単位時間に対するランニングコストは、ただ  $\mu_t$  だけで決まる。Bather によれば時間  $t$  での決定に対しては、充足統計量  $U_t$  がある。従って、 $U_t$  は点が中止領域に入るまで打点される。充足統計量は

$$U_t = qU_{t-1} + (1-q)x_t$$

で、この場合、

$$q = v / (v + \rho^2)$$

と

$$v^2 + \rho^2 v - \rho^2 \sigma^2 = 0$$

の正の根である。つまり、この統計量は最後のオ

ーバホール以後のすべての観察値の指数型の重み付き和である。適当な中止領域は、次のようにして求められる。まず潜在費用関数  $f(u)$  を定義しよう。この関数は充足統計量  $U_t$  の変化が期待費用に及ぼす効果とディスカウント要因  $\gamma$  の大きさを表わす。

$U_t = u, K(u)$  — 但、 $K(u)$  は、オーバホールコスト — の場合、単位時間の期待ランニングコストを  $C(u)$  とすれば、 $f(u)$  と  $\gamma$  は一義的に決まる。

Taylor [39] が問題にしているのは、Girshick と Rubin [28] のモデルである。Taylor の仮定は次のようなものである。

各製品が生産される前に管理されているもの  $(1-\pi)$  と、管理はずれの確率  $\pi$  とがある。時間  $t$  において観察された量  $U_t$  は工程の管理下では  $N(\mu_0, \sigma^2)$ 、管理はずれの下では  $N(\mu, \sigma^2)$  である。一旦、工程が管理はずれとなれば、それは修理されるまで管理はずれのままである。工程を修理する為に  $k$  単位の費用がかかり、製品の品質  $U_t = u$  の品目は、 $\hat{c}(u)$  単位の費用を要する。観察結果に基づいた単位時間当たりの平均費用を最小にする為の管理規定を見出すことが要求されている。Girschick と Rubin によると、この基準を満足する規則は、工程が管理されているか、管理はずれにあるかという事後確率によらなくてはならない。但、次の品目の生産には、いかなる修理も行なわれないと仮定する。

この確率が  $X_t$  の場合には、Taylor によると

$$Z_t = X_t / (1 - X_t)$$

である。 $p_0(u)$  と  $p_1(u)$  がそれぞれ管理下および管理はずれでの工程特性の確率密度関数で、 $X_t = x, Z_t = z, U_t = u$  ならば、これから

$$X_{t+1} = \frac{xp_1(u) + \pi(1-x)p_0(u)}{xp_1(u) + (1-x)p_0(u)}$$

と

$$Z_{t+1} = \frac{1}{(1-\pi)} \pi + z \frac{p_1(u)}{p_0(u)}$$

となる。但、 $X_0 = 0, Z_0 = 0$  である。Taylor によると  $X_t \geq \lambda$  の場合でのみ時間  $t$  で停止、そして修理しなくてはならない。

Page [44] は、連続工程における工程平均の変

化の点推定を考察している。それは、過去のデータを利用して工程平均の変化の検出、およびその変化がどこで起きたかを推定する問題である。もしも、観察値が  $x_1, \dots, x_n$  で  $\theta, \theta'$  が既知であれば、仮説  $H_i$  は最初の  $i$  個の観察値が分布  $F(x|\theta)$  から、その残りが  $F(x|\theta')$  からとられているとしよう。次に

$$L_i(x) \geq L_j(x) \quad (j \neq i)$$

ならば  $x \in R_i$  としよう。その場合  $L_i(x)$  は仮説  $H_i$  のもとでの観察値の尤度である。  $H_i$  が同じ程度に確からしいと仮定すれば、また  $H_i$  がいずれも等しく確からしいと仮定して、  $x_i \in R_i$  ならば  $H_i$  を選ぶのが Page のルールである。

Page は、  $F(x|\theta)$  は平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  をもつ正規分布であり、かつ  $F(x|\theta')$  も平均  $\mu + \delta$  ( $\delta > 0$ ), 分散  $\sigma^2$  をもつ正規分布である場合の例を考えている。

そこで上の手順は

$$S_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu - \frac{\delta}{2}), \quad S_0 = 0$$

を打点することであり、

$$(S_{i+k} - S_i) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, N-i)$$

そして

$$S_i - S_{i-k-1} \leq 0 \quad (k = 0, \dots, i-1)$$

ならば  $H_i$  を選ぶことである。つまり、  $S_i$  が最小となる  $i$  の値を選ぶことに他ならない。

連続生産型抜取検査の問題に利用できるもっとも一般的な手法は、累積和図である。但、条件は工程の変化が工程の平均水準に起る場合である。変化を見つけるのにもっとも便利な方法は、決定区間法を用いることである。この決定区間法は、V—マスクの方法と同じものである。

合格品か不合格品かに対して、点数を与える累積和法が、処理（かつ警告）限界をもつシュワートの方法と同じものである。

個々の決定区間法の選択を決定するための通常の判定基準が A. R. L. である。工程費用が簡単に計算できそうもない場合には、A. R. L. はその計画の一般的な実行の為の大体の指針としての意

味しかない。

大事な点は、工程平均におけるどんな大きな変化も、即刻検出されなくてはならないことである。

工程管理の問題に関するもっとも最近の研究は、工程モデルに対して、種々の自己回帰過程を考察している。一般にこうした工程モデルを使うと、観察値の重ね付き和である推定量が分る。この場合、費用の問題が常に考慮されていることを付言しておく。

## 文献

- [4] Barnard, G. A. (1959). Control charts and stochastic process J. R. Statist. Soc., 21, 239—271.
- [7] Duncan, A. J. (1956). Economic design of  $\bar{x}$  charts used to maintain current control of a process, J. Amer. Statist. Ass., 51, 228—242.
- [8] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1962). Some statistical aspects of adaptive optimization and control, J. R. Statist. Soc., 24, 297—331.
- [9] Bather, J. A. (1963). Control charts and the minimization of costs, J. R. Statist. Soc., 25, 49—70.
- [10] ————— (1966). Free boundary problems in the design of a control charts, Paper presented at the European Meeting of Statisticians., London.
- [28] Girschick, M. A. and Rubin, H. (1952). A Bayes approach to a quality control model, Ann, Math. Statist., 23, 114—125.
- [36] George, E. P. Box and M. Jenkins (1970). Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day, Inc.
- [38] Taylor, M. H. (1965) Markovian sequential replacement process, Ann. Math. Statist, 36, 1677—1694.
- [39] ————— (1967) Statistical control of a Gaussian process, Technometrics, 9, 29—41.

- [40] Phillips, M. J. (1969) A survey of Sampling procedures for Continuous Production, J. R. Statist. Soc, 132, 205—228.
- [41] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1966) Recent advances in forecasting and control. Techn. Report No 5, Univ. of Lancaster.
- [42] 上掲書 [36] の 127—129, 156, 404. 参照
- [43] 上掲書 [36] の13, 114—119, 345. 参照
- [44] Page, E. S. (1957) Estimating the point of change in a continuous process, Biometrika, 44, 248—252.