長野大学紀要　第13巻第1号　8－10頁　1991

標準正規乱数生成の方法について

On a Method for Generating Standard Normal Random Numbers

奥　村　博　造
Hirozo Okumura

1. はじめに

種々の確率分布に従う疑似乱数は区間(0，1)での一様分布に従う疑似乱数u_iに適当な変換をほどこすことにより得られる。すなわち、ある分布の疑似乱数を生成するときその分布の確率密度関数を$g(x)$とすると疑似乱数y_iはその分布の累積分布関数

$F(y)=\int_{-\infty}^{y} g(x)\,dx$

の逆の関数　$F^{-1}(u)$を用いて

$$y_i=F^{-1}(u_i)$$

と表すことができる。平均が0、分散が1の正規分布（標準正規分布）に従う疑似乱数を生成するには

$$g(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$$

として$F^{-1}(u)$を求めることになるが$F^{-1}(u)$は解析的に表すことができないので近似的に求める必要がある。本研究では、標準正規分布関数の逆関数を種々の方法で近似的に求め、正規型疑似乱数を近似逆関数を用いて生成させ実行時間の比較検討を行う。さらに頻度テストとしてχ^2検定を行う。

2. 一様乱数

一様乱数の生成には乗算合同法を用いた。パラメータは、

$m=2^{31}-1$,　$a=16807$,
$b=123$　とした。
([1], [2], [3])

$X_{n+1}=aX_n \pmod{m}$　$n=1, 2, \cdots$
$X_1=b$
$u_n=X_n/m$　$n=1, 2, \cdots$

3. 標準正規分布関数の逆関数

$0<u<1$を満たす任意の実数uに対して

$$1-u=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{y}\exp(-t^2/2)\,dt$$

を満たす$y(u)$を計算することを考える。この関数の逆関数の主要部は$u\to 0$のとき

$$(-\log(cu))^{1/2}\quad c\text{は正の定数}$$

という形のため良い近似式がつくりにくいが、今まで次の様な近似式が提案されている。([4], [5])

[3.1] $1.135_{10}-5\leqq u\leqq 0.5$に対して
$y(u)=\{z(a_0-a_1/(z+a_2))\}^{1/2}$
ただし
$z=-\ln 4u(1-u)$,
$a_0=2.0611786$,　$a_1=5.7262204$,
$a_2=11.640595$
で最大相対誤差は$0.489_{10}-3$となる。

[3.2] $1.135_{10}-5\leqq u\leqq 0.5$に対して
$y(u)=\{z(a_0+a_1z+a_2/(a_3+a_1z)\}^{1/2}$ただし
$z=-\ln 4u(1-u)$,
$a_0=0.37029934_{10}+1$,
$a_1=-0.29489901_{10}-1$,
$a_2=0.19561294_{10}+1$,
$a_3=-0.91722758$
で最大相対誤差は$0.146_{10}-3$である

[3.3] $0.11_{10}-4\leqq u\leqq 0.5$に対して
$y(u)=\{z(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+a_6z^6+a_7z^7+a_8z^8+a_9z^9+a_{10}z^{10}\}^{1/2}$
ただし
$z=-\ln 4u(1-u)$,

$a_0 = \ 0.1570796288_{10}+1$,
$a_1 = \ 0.3706987906_{10}-1$,
$a_2 = -0.8364353589_{10}-3$,
$a_3 = -0.2250947176_{10}-3$,
$a_4 = \ 0.6841218299_{10}-5$,
$a_5 = \ 0.5824238515_{10}-5$,
$a_6 = -0.1045274970_{10}-6$,
$a_7 = \ 0.8360937017_{10}-7$,
$a_8 = -0.3231081277_{10}-8$,
$a_9 = \ 0.3657763036_{10}-10$,
$a_{10} = \ 0.6936233982_{10}-12$
で最大相対誤差は$0.123_{10}-7$となる。

[3.1]，[3.2]，[3.3] の場合は誤差の範囲があらかじめ決まっているので多くの乱数を生成する場合に困ることがある。そこで Newton 法を用いて任意の精度で逆関数を求めてみる。

$$Q(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2)\,dt$$

$$= 1 - F(y)$$

と置くとき、u=Q (y) の逆関数を Newton 法で求める方法はかならずしも能率はよくないが十分な精度を得ることができる。このとき次の二種類の方法を用いて Q (y) および Q (y)／Q' (y) を計算した。

([4])

[3.4]

$$Q(y) = -Q'(y)\,h(y)$$

$$Q'(y) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-y^2/2)$$

$$h(y) = \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{y + \cfrac{2}{\cdots}}}$$

[3.5]

$$Q(y) = 0.5 - 0.5(1.0 - F2(y))^{1/2} \quad y > 0$$

$$Q(y) = 0.5 + 0.5(1.0 - F2(-y))^{1/2} \quad y < 0$$

ただし

$F2(y)$
$= \exp(-2y^2/\pi)\{1 + y^4(a + b/(y^2 + c))\}$
$a = 0.0055$, $b = 0.0551$, $c = 14.4$である。

[3.1]，…，[3.5] までの近似式を用いて標準正規分布関数の逆関数 $F^{-1}(u)$ 近似的に求め
$y_i = F^{-1}(u_i)$
として正規型疑似乱数（平均０，分散１）を生成させた。

4. 計算結果

表１，表２，表３は正規型疑似乱数（平均０，分散１）を生成するために要した時間の結果と χ^2 検定の結果である。表１において、[3.4]，[3.5] の Newton 法を用いた場合は [3.1]，[3.2]，[3.3] に対して５倍から７倍くらい計算時間が長くなっている。これは Newton 法の繰り返し回数がおよそ５回ぐらいであることに対応している。

	10000個	100000
3.1	0：04	1：59
3.2	0：06	2：10
3.3	0：19	3：14
3.4	2：40	26：41
3.5	1：35	15：55

表１　（単位　分：秒）

表２は正規型疑似乱数を1000個生成したときの頻度テストの結果である。１－10の列の数値は区間［－５，５］を10等分しそのときの実現度数と理論度数の差の２乗を理論度数で割った値の和である。この値は近似的に自由度９の χ^2分布に従うことがわかっている。51－80の列は区間［－５，５］を100等分しヒストグラムの51番目から80番目までに対して同様の計算をしたものである。ここで、$\chi^2(9, 0.05) = 16.9$, $\chi^2(29, 0.05) = 42.6$ だからこの場合は両者とも頻度テストに合格している。

	1－10	51－80
3.1	4.94	30.8
3.2	4.72	32.8
3.3	4.72	32.4
3.4	4.65	37.6
3.5	3.72	37.6

表2

表3は正規型疑似乱数を100000個生成したときの頻度テストの結果である。51－80と31－80の列の数値は表2と同様の計算をしている。11－190の列は区間［－5，5］を200等分したあとヒストグラムの11番目から190番目までに対して先と同様の計算をしたものである。χ^2 (29, 0.05)＝42.6, χ^2 (49, 0.05)＝66.3, χ^2 (179, 0.05)＝210.2であるから最後の列に対してはNewton法を用いた場合のみ頻度テストに合格したことがわかる。

	51－80	31－80	11－190
3.1	36.1	59.7	213.5
3.2	35.5	59.9	211.4
3.3	35.3	59.3	212.5
3.4	34.8	59.0	209.3
3.5	30.0	55.4	192.9

表3

5．結論

正規分布関数の逆関数をNewton法を用いて近似して正規型疑似乱数を発生させる方法を改良した。そして、他の逆関数法による場合と実行時間の比較をし、さらに、正規型疑似乱数の一様性の検定をχ^2検定で行った。Newton法を用いた方法によって実行時間を気にしなければ高い精度の乱数を得ることができる。

今後の課題としては、独立性の検定がある。乗算合同法においてパラメータの値を変えるだけでは互いに独立な一様乱数列を生成させることは難しいので正規型疑似乱数列の独立性の検定はさらに工夫をする必要がある。

（おくむら　ひろぞう　講師）

（1991.3.27受理）

参考文献

［1］　モンテカルロ法とシミュレーション
津田孝夫著　倍風館（1969）

［2］　乱数の知識　脇本和正著　森北出版（1970）

［3］　Bスプライン関数を用いた、任意の確率分布に従う疑似乱数の生成に関する研究
奥村博造，北岡正敏　日本経営数学会誌（1988）

［4］　電子計算機のための数値計算法III
山内二郎，宇野利雄，一松信共編　倍風館（1972）

［5］　正規型疑似乱数列の発生法について
平川保博　日本経営工学会秋期研究大会予稿集（1987）