長野大学紀要　第15巻第1号　40－44頁　1993

Bスプライン関数のフーリエ変換の性質について

On the property of Fourier transform of B spline functions

奥　村　博　造

Hirozo Okumura

1．はじめに

Fourier 解析は周波数分析や時系列解析など多くの分野で用いられている(参考文献[1]参照)。古くはある関数の Fourier 変換を求めるにはその関数の近似関数をつくり、近似関数の Fourier 変換を解析的に計算する方法が用いられていた（フィロンの方法[2]）。この方法だと精度を高くして計算することは可能だが、一般に計算量が多すぎるという欠点を持っていた。

クーリーとテューキー（Cooly and Tukey）によって、Fourier 変換を数値的に求める方法として高速フーリエ変換（FFT）が提案されてからは解析的な方法は用いられることが少なくなった。今回の報告ではまずBスプライン関数の Fourier 変換を解析的に求める公式を与えた。さらに等間隔の節点を持つBスプライン関数の Fourier 変換の公式を精密にし、古くからの方法において近似関数としてBスプライン関数を採用した場合にFFTのアルゴリズムと組み合わせることができることを示した。

2．Bスプライン関数

スプライン関数とは多項式を何らかの連続条件を満たすように接続した区分的に滑らかな関数のことである。Bスプライン関数 $M_{kj}(t)$ はその一種であり、スプライン関数のなかでも特に数学的に取り扱い易い性質を持っている。自然数kに対して t をパラメータとする y についての切断べき関数 $M_k(t,y)=(y-t)_+^{k-1}$ を次のように定義する。
つまり $t\leqq y$ のとき

$$M_k(t,y)=(y-t)^{k-1}$$

であり $t\geqq y$ のとき

$$M_k(t,y)=0$$

である。ξ_n(nは整数)を大きさの順に並んだ実数列とし、$lim_{n\to\infty}\xi_n=\infty$ 及び $lim_{n\to-\infty}\xi_n=-\infty$ を満たすものとする。切断べき関数 $M_k(t,y)$ の点 $\xi_{j-k},\xi_{j-k+1},\cdots,\xi_j$ に関するk階差分商をk階のBスプライン関数 $M_{kj}(t)$ という。ただし j は整数を表す。ここで $\xi_{j-k},\xi_{j-k+1},\cdots,\xi_j$ をBスプライン関数 $M_{kj}(t)$ の節点といい、関数 $f(y)$ の点 $y_1,\cdots,y_k$ に関する差分商 $f[y_1,\cdots,y_k]$ は次のように定義される。すなわち $k=2$ に対して

$$f[y_1,y_2]=\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}$$

及び、$k\geqq3$ に対して

$$f[y_1,\cdots,y_k]=\frac{f[y_2,\cdots,y_k]-f[y_1,\cdots,y_{k-1}]}{y_k-y_1}$$

である。

参考文献[3]、[4]によると差分商に関して次の命題が成り立つ。

命題2．1
k,l を自然数とすると

$$y^{k+1}[y_1,\cdots,y_{k+1}]=\sum_{j=1}^{k+1}y_j$$

$$y^{k+2}[y_1,\cdots,y_{k+1}]=\sum_{j=1}^{k+1}y_j^2+\sum_{1\leqq i<j}^{k+1}y_iy_j$$

$$y^{k+l}[y_1,\cdots,y_{k+1}]=\sum_{1\leqq i_1\leqq\cdots\leqq i_l}^{k+1}y_{i_1}\cdots y_{i_l}$$

が成り立つ。

命題2．1とBスプライン関数の性質を組み合わせて次の命題を得る。

命題２．２
$w(t)=\prod_{j=1}^{k+1}(t-t_j)$ に対して

$$M_{kj}(t)=\sum_{h=0}^{k}\frac{(-t+\xi_{j-h})_+^{k-1}}{w'(\xi_{j-h})}$$

ただし $w'(t)$ は $w(t)$ の導関数である。

命題２．３
$\xi_{j-k}<t<\xi_j$ を満たす t に対して
$M_{kj}(t)>0$
が成り立つ。その他の t に対して
$M_{kj}(t)=0$
が成り立つ。

３．Bスプライン関数の Fourier 変換

命題２．３よりBスプライン関数 $M_{kj}(t)$は実軸上で積分することができる。そこで、$M_{kj}(t)$ の Fourier 変換 $\hat{M}_{kj}(w)$ を次のように定義する。

$$\hat{M}_{kj}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itw}M_{kj}(t)dt$$

このとき部分積分を使って計算すると次の定理が成り立つことが成り立つことがわかる。

定理３．１
$w\neq0$ に対して

$$\hat{M}_{kj}(w)=\frac{(k-1)!}{(-iw)^k}e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_j]$$

が成り立つ。ただし、$e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_j]$は w をパラメータとする y の関数 e^{-iyw} の差分商を表す。

定理３．１の証明
定義より

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}(-iw)^{k-1}e^{-itw}M_{kj}(t)dt$$

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}e^{-itw}M_{kj}(t)dt$$

が成り立つ。$M_{kj}(t)$ は C^{k-2} 級の関数だから部分積分を用いて

$$=(-1)^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itw}M_{kj}^{(k-1)}(t)dt$$

となる。ただし、$M_{kj}^{(k-1)}(t)$ は $M_{kj}(t)$ の $k-2$階導関数を超関数として微分したものを表す。命題２．３より実軸上での積分は区間 $[\xi_{j-k},\xi_j]$ 上での積分としてよいから

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=(-1)^{k-1}\int_{\xi_{j-k}}^{\xi_j}e^{-itw}M_{kj}^{(k-1)}(t)dt$$

となる。命題２．２より

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{h=0}^{k}\frac{(\xi_{i-h}-t)_+^0}{w'(\xi_{j-h})}$$

となるからこれを代入して

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=(k-1)!\sum_{h=0}^{k}\int_{\xi_{j-k}}^{\xi_j}\frac{(\xi_{j-h}-t)_+^0}{w'(\xi_{j-h})}e^{-itw}dt$$

となる。$t\geqq\xi_{j-k}$ では被積分関数は０だから

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=(k-1)!\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{w'(\xi_{j-h})}\int_{\xi_{j-k}}^{\xi_{j-h}}e^{-itw}dt$$

を得る。$w\neq0$ として積分を実行して

$$(-iw)^{k-1}\hat{M}_{kj}(w)=\frac{(k-1)!}{(-iw)}\sum_{h=0}^{k}\frac{e^{-i\xi_{j-h}w}}{w'(\xi_{j-h})}-\frac{(k-1)!}{(-iw)}\sum_{h=0}^{k}\frac{e^{-i\xi_{j-k}w}}{w'(\xi_{j-h})}$$

より

$$\hat{M}_{kj}(w)=\frac{(k-1)!}{(-iw)^k}\sum_{h=0}^{k}\frac{e^{-i\xi_{j-h}w}}{w'(\xi_{j-h})}-\frac{(k-1)!}{(-iw)^k}e^{-i\xi_{j-k}w}\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{w'(\xi_{j-h})}$$

となる。

$$\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{w'(\xi_{j-h})}=0$$

より

$$\hat{M}_{kj}(w)=\frac{(k-1)!}{(-iw)^k}\sum_{h=0}^{k}\frac{e^{-i\xi_{j-h}w}}{w'(\xi_{j-h})}$$

となる。さらに差分商の結果を用いると

$$\sum_{h=0}^{k}\frac{e^{-i\xi_{j-h}w}}{w'(\xi_{j-h})}=e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_j]$$

だから

$$\hat{M}_{kj}(w)=\frac{(k-1)!}{(-iw)^k}e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_j]$$

を得る。

以下Bスプライン関数 $M_{kj}(t)$ が等間隔節点を持つ場合を考える。すなわち ξ_0 を固定し $\delta>0$ に対して $\xi_j=\xi_0+j\delta$ の場合を考える。$O_{kj}(t)=O_{kj}(t,\xi_0,\delta)=kM_{kj}(t)$ とおくと参考文献［5］によると

$$\int_{-\infty}^{\infty}O_{kj}(t)dt=1$$

が成り立つ。さらに定理3．1より次の結果を得る。

定理3．2
任意の実数wに対して

$$\hat{O}_{kj}(w)=g\left(\frac{\delta w}{2}\right)^k e^{-i\xi_0 w-i(j-\frac{k}{2})\delta w}$$

となる。ただし、

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}$$

である。
定理3．2の証明には次の命題3．3を用いる。

命題3．3
任意の自然数kに対して

$$\hat{O}_{kj}(w)=\frac{i}{\delta w}\hat{O}_{k-1j}(w)-\frac{i}{\delta w}\hat{O}_{k-1j-1}(w)$$

が成り立つ。

命題3．3の証明
定理3．1より

$$\hat{O}_{kj}(w)=\frac{k!}{(-iw)^k}e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_j]$$

である。差分商の定義より

$$\hat{O}_{kj}(w)=\frac{k!}{(-iw)^k}\frac{e^{-iyw}[\xi_{j-k+1},\cdots,\xi_j]-e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_{j-1}]}{\xi_j-\xi_{j-k}}$$

となる。定理3．1より

$$e^{-iyw}[\xi_{j-k+1},\cdots,\xi_j]=\frac{(-iw)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{O}_{k-1j}(w)$$

$$e^{-iyw}[\xi_{j-k},\cdots,\xi_{j-1}]=\frac{(-iw)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{O}_{k-1j-1}(w)$$

であり、$\xi_j-\xi_{j-k}=k\delta$とともに $\hat{O}_{kj}(w)$の式に代入すると求める式を得る。

定理3．2の証明
数学的帰納法を用いて定理3．2を証明する。

まず、$k=1$ のとき

$$\hat{O}_{1j}(w)=\frac{1}{-iw}\frac{e^{-iyw}[\xi_{j-1},\xi_j]}{\xi_j-\xi_{j-1}}$$

$$=\frac{1}{-iw}\frac{e^{-i\xi_j w}-e^{-i\xi_{j-1}w}}{\xi_j-\xi_{j-1}}$$

である。$\xi_j-\xi_{j-1}=\delta, e^{-i\xi w}=\cos\xi w-i\sin\xi w$ を利用して整理すると

$$\hat{O}_{1j}(w)=\frac{1}{\delta w}\{i(\cos\xi_j w-\cos\xi_{j-1}w)+\sin\xi_j w-\sin\xi_{j-1}w\}$$

となる。三角関数の加法定理を用いると

$$\hat{O}_{1j}(w)=\frac{2}{\delta w}\sin\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})w}{2}\left\{\cos\frac{(\xi_j+\xi_{j-1})w}{2}-i\sin\frac{(\xi_j+\xi_{j-1})w}{2}\right\}$$

を得る。$\xi_j-\xi_{j-1}=\delta, \xi_j+\xi_{j-1}=2\xi_0+(2j-1)\delta$を代入して整理すると

$$\hat{O}_{1j}(w)=\frac{2}{\delta w}\sin\frac{\delta w}{2}e^{-i\xi_0 w-i(j-1/2)\delta\xi}$$

となり

$$g\left(\frac{\delta w}{2}\right)=\frac{2}{\delta w}\sin\frac{\delta w}{2}$$

だから $k=1$ のとき定理3．2は成り立つ。

次に定理3．2が自然数 $k=l$ のとき成り立つと仮定する。命題3．3より

$$\hat{O}_{l+1j}(w)=\frac{i}{\delta w}\hat{O}_{lj}(w)-\frac{i}{\delta w}\hat{O}_{lj-1}(w)$$

である。$k=l$ のときに定理3．2が成り立つから代入して整理すると

$$\hat{O}_{l+1j}(w)$$
$$=\frac{i}{\delta w}g\left(\frac{\delta w}{2}\right)^{l}e^{-i\xi_0 w}\{e^{-i(j-\frac{l}{2})\delta w}-e^{-i(j-1-\frac{l}{2})\delta w}\}$$

となる。$k=1$ のときと同様に{　}の中を整理すると

$$\hat{O}_{l+1j}(w)=\frac{2}{\delta w}\sin\frac{\delta w}{2}g\left(\frac{\delta w}{2}\right)^{l}e^{-i\xi_0 w-i(j-\frac{l+1}{2})\delta w}$$

となり $k=l+1$ の場合にも定理3．2が成り立つことがわかる。

4．FFTへの応用

一般に観測されるデータは誤差を含んでいる。実軸上の区間 $[0,T]$ にN個の標本点 $t_i=i\Delta t, \Delta t=\frac{T}{N}(i=0,1,\cdots,N-1)$ がありこれらの標本点に対して観測値 y_i が与えられているものとする。この観測値はある未知関数 $f(t)$ に誤差 e が加わってできたものとする。すなわち

$$y_i=f(t_i)+e_i(i=0,\cdots,N-1)$$

で e_i は平均が0、分散が σ^2 の正規分布をする互いに独立な誤差であるとする。

これらの有限離散データの Fourier 成分を求める方法には FFT 法がある。ここでは与えられた観測値を等間隔の節点 $\xi_j=\frac{k}{2}+j\delta(\delta>0)$ を持つBスプライン関数 $O_{kj}(t)$ の一次結合で近似した後で定理3．2を用いてその Fourier 変換を求めることを考える。ただし j は整数を表す。

まず自然数 P に対して

$$S(t)=\sum_{j=1}^{P}c_jO_{kj}(t)$$

とし、データ y_i を関数 $S(t)$ で最小二乗近似する。観測値と関数値の残差の二乗和 Q を

$$Q=Q(c_1,\cdots,c_P)=\sum_{i=0}^{N-1}\{\sum_{1}^{P}c_jO_{kj}(t_i)-y_i\}^2$$

とするとこの Q を最小にするように P 個のパラメータ $c_1,\cdots,c_P$ を決定すればよい。そのために $Q(c_1,\cdots,c_P)$ を c_h で偏微分して正規方程式を求めその正規方程式を解くことによって $c_1,\cdots,c_P$ を求めるとよい。

$S(t)$ に定理3．2を応用すると

$$\hat{O}_{kj}(w)=g\left(\frac{\delta w}{2}\right)^{k}e^{-i\frac{k}{2}w-i(j-\frac{k}{2})\delta w}$$
$$=g\left(\frac{\delta w}{2}\right)^{k}e^{-ij\delta w}$$

となるから

$$\hat{S}(w)=\sum_{j=1}^{P}c_j\hat{O}_{kj}(w)$$

$$\hat{S}(w)=g\left(\frac{1}{2}\delta w\right)^{k}\sum_{j=1}^{P}c_je^{-ij\delta w}$$

となる。$g\left(\frac{1}{2}\delta w\right)^{k}$ は掛け算を行うだけだから実質的な計算は

$$\sum_{j=1}^{P}c_je^{-ij\delta w}$$

の部分である。よって与えられた N 個のデータ y_i の代わりに c_j を用いて FFT のアルゴリズムを組み合わせて Fourier 成分を求めることができる。

5．問題点と今後の課題

今回応用で求めた結果は理論的なものであり、その有用性を明らかにするには FFT 法や他のスペクトル計算の方法との比較を行う必要がある。またここで求めた定理3．1と定理3．2はほとんど修正無しに Laplace変換に対しても成り立つ。その応用も興味ぶかいものがあると思われる。

（おくむら　ひろぞう　助教授）

（1993．4．5　受理）

参 考 文 献

[1] 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店（1977）

[2] Hamming, R.W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers, McGrawHill, (1962)

[3] 市田浩三、吉本富士市：スプライン関数とその応用，教育出版（1979）

[4] Nurnberger, G.: Approximation by Spline Functions, Springer-Verlag (1989)

[5] 奥村博造、北岡正敏：Bスプライン関数の正規化とその応用，日本経営数学会誌 Vol.14,1-4 (1992)