長野大学紀要　第20巻第4号　1－7頁（323－329頁）　1999

ハールウェーブレット変換と完全再構成QMフィルタ

Haar Wavelet Transforms and Perfect Reconstruction Quadrature Mirror Filters

奥 村 博 造*
Hirozo OKUMURA

1　はじめに

音声や画像の情報圧縮処理では、信号をいくつかの帯域に分解してそれぞれの帯域ごとに処理を実行することが必要になる。そのとき、信号の帯域分割や合成を行うシステムを一般にフィルタバンクあるいはフィルタといい、特に、帯域が2つの場合を2分割フィルタバンクという。この2分割フィルタは基礎的でかつ実用性の高いものであり、電子透かし技術にも応用されている。一般に、入力信号を分割信号に分けるものを帯域分割フィルタ（アナライザ）といい、逆に分割された信号から元の信号を復元するものを帯域合成フィルタ（シンセサイザ）という。信号に量子化を施さないような理想的な場合、入力信号と出力信号が一致するように設計されたフィルタを完全再構成QMフィルタという。

完全再構成QMフィルタを構成するにはいくつかの方法があるが、本論文ではハールウェーブレットを用いて構成することを考える。ここでウェーブレットとは信号を時間と周波数の両面から同時にとらえる時間周波数解析において信号を切り出す単位となるもので、Morley [1] によって初めて導入された。その後、Meyer [2] や Daubechies [3] らによってウェーブレットの数学的性質が明らかになった。ハールウェーブレットはそのウェーブレットの中でもっとも簡単で応用しやすいものである。このハールウェーブレットを用いた完全フィルタの構成アルゴリズムは貴家 [4] にもあるが、この論文ではより物理的実現性を考慮した新しい構成アルゴリズムを提案する。以下この論文の構成について述べる。2章でハールウェーブレット変換の基本的な性質について述べる。3章ではサブバンド符号化と遅延なしの完全再構成QMフィルタについて述べ、4章では物理的に実現可能な完全再構成QMフィルタについて述べる。最後に5章で今後の課題について述べる。

2　ハールウェーブレット変換

この章では榊原 [5] にしたがってハールウェーブレット変換（Haar 関数を基にしたウェーブレット変換）について述べる。ここで Haar 関数とは

$$\phi_H(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x<1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

と定義される（図 2.1）。この $\phi_H(x)$ をスケーリング関数とするウェーブレット関数 $\psi_H(x)$ を求めると

$$\psi_H(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x<1/2\\ -1 & 1/2\leq x<1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

＊助教授

となる（図 2.2)。

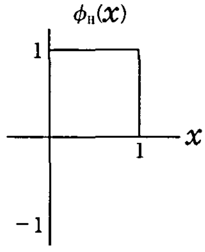


図 2.1

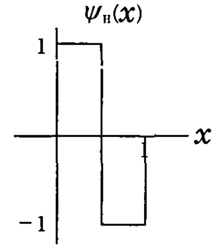


図 2.2

このスケーリング関数 $\phi_H(x)$ とウェーブレット関数 $\psi_H(x)$ を用いて与えられた連続関数 $f(x)$ を近似することを考える。連続関数 $f(x)$ のレベル $j(j\in Z)$ の近似関数 $f_j(x)$ を

$$f_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j)}\phi_H(2^jx-k)$$

と定義する。ただし $k\in Z$ に対して係数 $c_k^{(j)}$ は積分

$$c_k^{(j)}=2^j\int_{k/2j}^{(k+1)/2j} f(x)dx$$

で与えられるとする。さらに $g_j(x)=f_{j+1}(x)-f_j(x)$ とおくと、$g_j(x)$ は関数 $f(x)$ の解像度 2^j の成分をあらわし、ウェーブレット関数 $\psi_H(x)$ を用いて

$$g_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(j)}\psi_H(2^jx-k)$$

とあらわすことができる。ただし

$$d_k^{(j)}=\frac{1}{2}(c_{2k}^{(j+1)}-c_{2k+1}^{(j+1)})$$

である。一方、$c_k^{(j)}$ の定義から

$$c_k^{(j)}=\frac{1}{2}(c_{2k}^{(j+1)}+c_{2k+1}^{(j+1)})$$

が成り立つことが分かる。この二つの関係式を分解アルゴリズムという。

逆に、$f_j(x)$ と $g_j(x)$ が与えられれば $f_{j+1}(x)=f_j(x)+g_j(x)$ を再構成できる。このときの係数を求める式は

$$c_{2k}^{(j+1)}=c_k^{(j)}+d_k^{(j)}$$

$$c_{2k+1}^{(j+1)}=c_k^{(j)}-d_k^{(j)}$$

となる。これを再構成アルゴリズムという。

関数 $f(x)$ のレベル j の近似関数 f_j の解像度は 2^j で、$\{f_j\}_{j\in Z}$ は解像度の階層構造を持つ。この $\{f_j\}_{j\in Z}$ を多重解像度解析という。分解アルゴリズムを再帰的に繰り返すと

$$f_j(x)=g_{j-1}(x)+g_{j-2}(x)+\cdots\cdots+g_0(x)+f_0(x)$$

となる。ここで関数 $g_l(x)(0\leq l\leq j-1)$ は $f(x)$ の解像度 2^l の成分をあらわし、次のようにレベル l のウェーブレットの線形結合であらわされる。

$$g_l(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(l)}\psi_H(2^lx-k)$$

上記の分解アルゴリズムと再構成アルゴリズムをあらわす関係式をスケーリング関数 $\phi_H(x)$ とウェーブレット関数 $\psi_H(x)$ で書き直すと

$$\phi_H(x)=\phi_H(2x)+\phi_H(2x-1)$$

$$\psi_H(x)=\phi_H(2x)-\phi_H(2x-1)$$

となる。この式を Haar 関数のみたすツースケール関係という。

3　サブバンド分解

2章で述べた分解アルゴリズムは離散データ $\{c_k^{(j)}\}_{k\in Z}$ をデジタルフィルタを通して信号 $\{c_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$ と $\{d_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$ に変換する過程としてとらえることができる。反対に再構成アルゴリズムはこれら分解された信号を元のデータに変換する過程としてとらえることができる。分解アルゴリズムと再構成アルゴリズムをあらわす公式は次の様なものであった。

$$c_k^{(j-1)}=\frac{1}{2}(c_{2k}^{(j)}+c_{2k+1}^{(j)})$$

$$d_k^{(j-1)}=\frac{1}{2}(c_{2k}^{(j)}-c_{2k+1}^{(j)})$$

$$c_{2k}^{(j)}=c_k^{(j-1)}+d_k^{(j-1)}$$

$$c_{2k+1}^{(j)}=c_k^{(j-1)}-d_k^{(j-1)}$$

ここで次のように数列

$$p_0=1$$
$$p_1=1$$
$$p_k=0(k\neq 0,\ 1)$$
$$q_0=1$$
$$q_1=-1$$
$$q_k=0(k\neq 0,\ 1)$$
$$g_0=1/2$$
$$g_{-1}=1/2$$
$$g_k=0(k\neq 0,\ -1)$$
$$h_0=1/2$$
$$h_{-1}=-1/2$$
$$h_k=0(k\neq 0,\ -1)$$

を定義すると先の分解アルゴリズムと再構成アルゴリズムは

$$c_k^{(j-1)}=\sum_{l\in Z} g_{2k-l}c_l^{(j)}$$

$$d_k^{(j-1)}=\sum_{l\in Z} h_{2k-l}c_l^{(j)}$$

と

$$c_k^{(j)}=\sum_{l\in Z} p_{k-2l}c_l^{(j-1)}+q_{k-2l}d_l^{(j-1)}$$

のように数列の畳み込みを用いてあらわすことができる。これらをデジタルフィルタの観点から見直してみると次のようになる。

まず $\{c_k^{(j)}\}_{k\in Z}$ を入力信号、$\{c_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$ と $\{d_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$ を分解して得られた信号とし、それぞれに対応するZ変換を次のように定義する。

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j)}z^{-k}$$

$$X_L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j-1)}z^{-k}$$

$$X_H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(j-1)}z^{-k}$$

そうすると分解アルゴリズムは $\{c_k^{(j)}\}$ と $\{g_k\}$ あるいは $\{c_k^{(j)}\}$ と $\{h_k\}$ の離散畳み込みをダウンサンプリングする過程であり、

$$c_k^{(j-1)}=(g*c^{(j)})_k^{\downarrow}$$

$$d_k^{(j-1)}=(h*c^{(j)})_k^{\downarrow}$$

とあらわすことができ、それぞれ元の信号 $\{c_k^{(j)}\}_{k\in Z}$ の低周波成分と高周波成分に対応する。ここでダウンサンプリング（downsampling）とは離散信号 $\{c_k\}$ から $\{c_k^{\downarrow}\}$ を得る操作で、次のようにデータの偶数番だけ取り出して求めることができる。

$$c_k^{\downarrow}=c_{2k}$$

Ｚ変換を使えば

$$X_L(z)=\frac{1}{2}\{G(z^{1/2})X(z^{1/2})+G(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\}$$

$$X_H(z)=\frac{1}{2}\{H(z^{1/2})X(z^{1/2})+H(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\}$$

となる。ここで

$$G(z)=\sum_k g_k z^{-k}=\frac{1}{2}(1+z)$$

$$H(z)=\sum_k h_k z^{-k}=\frac{1}{2}(1-z)$$

で、数列 $\{g_k\}$ と $\{h_k\}$ のＺ変換である。

一方、再構成アルゴリズムは分解された信号 $\{c_k^{(j)}\}$ と $\{d_k^{(j)}\}$ をアップサンプリングしてそれぞれフィルタ $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ を通してたしあわせる過程をあらわし、

$$c_k^{(j)}=(p*c^{(j-1)\uparrow})_k+(p*c^{(j-1)\uparrow})_k$$

が得られる。ここでアップサンプリング（upsampling）とは離散信号 $\{c_k\}$ から $\{c_k^{\uparrow}\}$ を得る操作で、次のようにデータをひとつおきに挿入して求めることができる。

$$c_{2k}^{\uparrow}=c_k$$

$$c_{2k+1}^{\uparrow}=0$$

Ｚ変換を使えば出力 $\hat{X}(z)$ は

$$\hat{X}(z)=P(z)X_L(z^2)+Q(z)X_H(z^2)$$

となる。ただし、

$$P(z)=\sum_k p_k z^{-k}=1+z^{-1}$$

$$Q(z)=\sum_k q_k z^{-k}=1-z^{-1}$$

で、数列 $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ のＺ変換である。

$$P(z)X_L(z^2)=\frac{1}{2}P(z)\{G(z)X(z)+G(-z)X(-z)\}$$

$$Q(z)X_H(z^2)=\frac{1}{2}Q(z)\{H(z)X(z)+H(-z)X(-z)\}$$

だからこれを $\hat{X}(z)$ に代入してまとめると

$$\hat{X}(z)=\frac{1}{2}\{P(z)G(z)+Q(z)H(z)\}X(z)+\frac{1}{2}\{P(z)G(-z)+Q(z)H(-z)\}X(-z)$$

となる。$P(z)$、$Q(z)$、$G(z)$、$H(z)$ が

$$P(z)G(z)+Q(z)H(z)=2$$

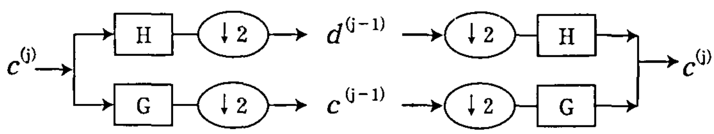
$$P(z)G(-z)+Q(z)H(-z)=0$$

を満たすことを用いれば

$$\hat{X}(z)=X(z)$$

つまり出力と入力が同一になることがわかる。

このように、信号 $X(z)$ は低周波成分 $X_L(z)$ と高周波成分 $X_H(z)$ に分解される。この過程をサブバンド分解という。$G(z)$ と $H(z)$ はそれぞれ離散信号の周波数帯域 $0\leq|\omega|\leq\pi$ を２分割するローパスフィルタ（LPF）とハイパスフィルタ（HPF）の対、すなわち分解フィルタを構成する。サブバンドに分解された信号をたしあわせると元の信号が再構成される。この時使われるローパスフィルタ(LPF)$P(z)$ とハイパスフィルタ（HPF)$Q(z)$ の組みは再構成フィルタを構成する。このように、全部で４個のフィルタはクァドレチャーミラーフィルタ（QMF）と呼ばれる２対のフィルタを構成する。多重解像度解析から導かれたQMフィルタ（図 3.1）は帯域２分割の完全再構成QMフィルタとなることがわかる。



QMフィルタ

図 3.1

4　実現可能なフィルタバンク

この章では信号 $\{c_k^{(j)}\}_{k\in Z}$、$\{c_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$、$\{d_k^{(j-1)}\}_{k\in Z}$ をそれぞれ $\{x(k)\}_{k\in Z}$、$\{x_L(k)\}_{k\in Z}$、$\{x_H(k)\}_{k\in Z}$ であらわすことにする。そうすると、$\{x(k)\}_{k\in Z}$、$\{x_L(k)\}_{k\in Z}$、$\{x_H(k)\}_{k\in Z}$ はそれぞれ入力信号、ローパス信号、ハイパス信号をあらわし、出力信号を $\{\hat{x}(k)\}_{k\in Z}$ とするとき、先のＺ変換の関係

$$\hat{X}(z)=X(z)$$

は

$$\hat{x}(k)=x(k)$$

となり、遅延なしの完全再構成QMフィルタをあらわすことがわかる。ところがこの解析で時系列信号を実際に処理するのは難しい。というのはフィルタ $G(z)=\frac{1}{2}(1+z)$ と $H(z)=\frac{1}{2}(1-z)$ にあらわれる z は未来の信号を扱うことに対応し、信号処理で用いられる遅延演算子 z^{-1} を用いては実現不可能だからである。つまり遅延なしの完全再構成フィルタバンクは物理的に実現不可能であり、実現可能にするには次のような遅れを持つものを考える必要がある。

$$\hat{x}(k)=x(k-l)\qquad l>0$$

この章では遅延が１の場合、すなわち、$l=1$ の場合の完全再構成QMフィルタを構成する。貴家［4］の構成法ではＺ変換の係数に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ がでてきてしまうが、物理的実現性をより高めるには、Ｚ変換の係数は２進有理数であることが望ましい。そこで、係数に２進有理数を用いても完全再構成QMフィルタを構成することができることを以下に示す。

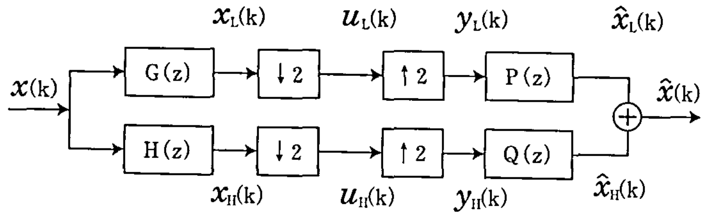
$$G(z)=\frac{1}{2}(1+z^{-1})$$

$$H(z)=-\frac{1}{2}(1-z^{-1})$$

$$P(z)=1+z^{-1}$$

$$Q(z)=1-z^{-1}$$

とおくと、次の図 4.1 のフィルタは完全再構成QMフィルタを構成する。



2分割フィルタバンク

図 4.1

証明

分解フィルタと再構成フィルタの入出力のＺ変換はそれぞれ次の関係式を満たす。

$$X_L(z)=G(z)X(z)$$
$$X_H(z)=H(z)X(z)$$

$$U_L(z)=\frac{1}{2}\{X_L(z^{\frac{1}{2}})+X_L(-z^{\frac{1}{2}})\}$$
$$U_H(z)=\frac{1}{2}\{X_H(z^{\frac{1}{2}})+X_H(-z^{\frac{1}{2}})\}$$

$$Y_L(z)=U_L(z^2)$$
$$Y_H(z)=U_H(z^2)$$

$$\hat{X}_L(z)=P(z)Y_L(z)$$
$$\hat{X}_H(z)=Q(z)Y_H(z)$$

これらを

$$\hat{X}(z)=\hat{X}_L(z)+\hat{X}_H(z)$$

に代入してまとめると

$$\hat{X}=\frac{1}{2}\{P(z)G(z)+Q(z)H(z)\}X(z)+\frac{1}{2}\{P(z)G(-z)+Q(z)H(-z)\}X(-z)$$

を得る。

$$P(z)G(z)+Q(z)H(z)=2z^{-1}$$
$$P(z)G(-z)+Q(z)H(-z)=0$$

が成り立つので

$$\hat{X}(z)=z^{-1}X(z)$$

を得る。これは

$$\hat{x}(k)=x(k-1)$$

を意味する。

5　今後の課題

本論文ではハールウェーブレットを用いて完全再構成フィルタバンクを構成するアルゴリズムを改良し、物理的実現性の高いアルゴリズムを提案した。ハールウェーブレットは０次のＢスプラインウェーブレットであり、今回のアルゴリズムは容易に高次のＢスプラインウェーブレットに拡張することができる（榊原 [5]）。だがＢスプラインウェーブレットを用いるともはや G(z) と H(z) は有限次ではなくなり、z^{-1} の無限次の多項式となる。物理的実現性を考えれば、G(z) と H(z) を有限次で近似する必要がある。遅れのない完全再構成QMフィルタの近似は榊原 [5] で扱っているが、遅れを持つ完全再構成QMフィルタの近似は今後の課題として残っている。

（1999. 1. 7　受理）

参考文献

[1] Morley, J., Arens,, G., Fourgeau, I., and Giard, D., Wave propagation and sampling theory, Part I, Geophisics, 47, pp. 203-221, (1982)
[2] Meyer, Y., Wavelets and operators, Cambridge University Press, (1992)
[3] Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, SIAM, (1992)
[4] 貴家仁志、マルチレート信号処理、昭晃堂、(1995)
[5] 榊原進、ウェーブレットビギナーズガイド、東京電機大学出版局、(1995)