

「制御点方式による曲線形状の生成」

Generation of curve shape with control-point approach

谷 口 道 興*

Michioki TANIGUCHI

1 はじめに

コンピュータによる最初の図形表示システムは、1963年の Sutherland による会話型の2次元図形処理システム「Sketchpad」であると言われているが、その指向したものは今日でいういわゆる CAD の分野であった。1960年代における CAD の発展の歴史の中で、一部の先進産業である自動車産業や航空機産業などの分野で2次元製図などの目的で用いられた。

1970年代に入って、現在と同じ方式のラスタスキャン型の CRT が出回るようになり、各種の表現力の豊かな陰影表示法が開発提案されるようになった。このような背景のもとに、物体の色彩や濃淡の表現が容易になり、それらをもとにして物体を立体的にかつ写実的に表示する手法の研究が進んだ。ラスタスキャン型の CRT は、走査線上を電子ビームが移動するもので、表示分解能はパソコンなどで使われている600×400画素程度のもから2000×2000画素の高解像度のもまでである。ラスタスキャン型はカラー表示ができる、動画が扱える、低価格であることなどから多くの装置でこの方式が採用されている。ただし、ジャギー (jaggy) が目立つという欠点も併せ持っているため、アンチエイリアシング (antialiasing) 処理を行っているのが一般的である。現在の3次元コンピュータ・グラフィックス (computer graphics : CG) に関する技術の多くは、この時期の研究成果を基礎としていて、現在のモデリング (modeling) 技法、レンダリング (rendering) 技法も前者が3次元座標系で対象とする物体の形状をデータ化する手法、後者が3次元座標系で記述された物体の質感や陰影を計算し2次元スクリーンに投影する手法、と呼ばれる課題として着目されていたものである。本稿では、3次元 CG の研究の経過の中での「自由曲線」について考察し、あわせてデータに基づいた実証を試みる。

2 物体のモデリング

3次元空間の中に物体を定義するためには、すべての物体を3次元座標上で表現する方法や手順が必要である。物体を3次元で記述していく作業のことを3次元モデリングまたは単にモデリングと呼び、できあがったデータをモデルと呼ぶ。

2.1 プリミティブ

ポリゴン (polygon) 近似によるモデリングよりも、関数を使ったモデリングのほうが計算時間の点で非常に有利な場合がある。例えば、4次以下の多項式で記述される図形は計算過程を解の公式に帰着す

*教授

ることができる。とくに2次式で記述される形状には、球、楕円体、放物面など比較的簡単な関数式で物体を表せるので直観的に理解しやすいし、コンピュータにも高い計算能力を要求しない。ところがこれらの図形をポリゴンで表現すると、その表面を滑らかに表すために、相応数のポリゴンが必要になる。このような簡単な2次以下の関数式で表せる図形をプリミティブ (primitive) と呼び、3次元 CG では高速画像生成のコンテンツとして用いることが多い。

また、平面を単位とする物体の形状モデルをサーフェースモデル (surface model) と呼ぶが、物体の形状モデルとしてはサーフェースモデルのほかに稜線情報を記録するワイヤフレームモデル (wireframe model)、物体の情報を記録するソリッドモデル (solid model) がある。ソリッドモデルに関しては、簡単な物体の一部削除や組み合わせなどの加工を順次施して、最終的に複雑な物体を構成するシステムであるソリッドモデリングシステムがある。ソリッドモデリングシステムにおける各物体のコンピュータでの内部表現としては、CSG 表現 (Constructive Solid Geometry representation) と境界表現 (boundary representation : B-Reps) が知られている。CSG 表現は、多数のプリミティブに集合演算 (set operation) などの操作を施し、最終的に複雑な物体を構成する方式である。すなわち、集合演算は複数の物体を組み合わせるより複雑な形状を生成するための手段として用いる。

CSG 表現では物体形状をプリミティブおよびプリミティブを組み合わせるための演算子の組で表現する。演算子には和、差、積の3種類がある。集合演算はプリミティブ図形のような CSG 表現だけでなく、ポリゴンで構成された物体同士の演算にも応用できる。しかし、すべてのポリゴン図形に適用できるということではなく、ポリゴン図形がウイングドエッジ (winged edge) と呼ばれる構造を満たす場合に限られている。この条件に合致するポリゴン図形が B-Reps である。B-Reps では物体を囲む境界面から頂点 (Vertex)、稜線 (Edge)、稜線で囲まれた面 (Face) のデータとそれらの位相的な関係から、3次元形状を表現する。面はポリゴン図形だけでなく曲面であってもよい。

B-Reps による表現はデータ構造上コンピュータ向きであるが、ポイントの操作が煩わしく、また内部構造に矛盾がおきても発見しにくいという欠点がある。また、人間がそのデータ構造を見て元の3次元形状を推測することは困難である。

2.2 パラメトリック曲線

3次元 CAD や3次元 CG で使用されるパラメトリック曲線については各種の数学的表現法が提案され実用化されている。パラメトリック曲線は、パラメトリックな表現形式で表される自由曲線であり、パラメトリックな表現形式はパラメータの陽関数として曲線を定義する方法である。

すなわち、曲線や曲面上の点の各座標成分 (x, y) をあるパラメータの関数として表現する形式をいい、曲線上の点 P は、パラメータを用いて

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

として表す。また、曲線上の点は、2つのパラメータ u, v を用いて

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

と表す。

たとえば、点 $Q_0(x_0, y_0)$ 、 $Q_1(x_1, y_1)$ を通る直線は

$$x(t) = (1-t)x_0 + tx_1$$

$$y(t) = (1-t)y_0 + ty_1$$

となり、この2式をまとめると

$$p(t) = (1-t)Q_0 + tQ_1$$

と表すことができる。

CG でよく利用されるパラメトリック曲線の表現方法としては、Bézier (ベジエ) 曲線、B-Spline (B-スプライン) 曲線、NURBS 曲線 (Non Uniform Rational B-Spline : 非一様有理Bスプライン) がある。

2.2.1 Bézier 曲線

ベジエ曲線は、P.Bézier が発案したもので、自動車の車体設計に用いたことで知られる。ベジエ曲線は制御点 (コントロールポイント) によって、曲線形状を制御するものである。n 次のベジエ曲線は、n + 1 個の制御点に n 次の調整関数 (blending functins) である $J_{n, i}(t)$ で重みづけをした次式で定義する。

$$p(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n, i}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{1}$$

ここで、 $J_{n, i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ (2)

$J_{n, i}(t)$ は、i 番目の n 次の Bernstein 基底関数である。

ただし、 $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (3) は二項係数である。

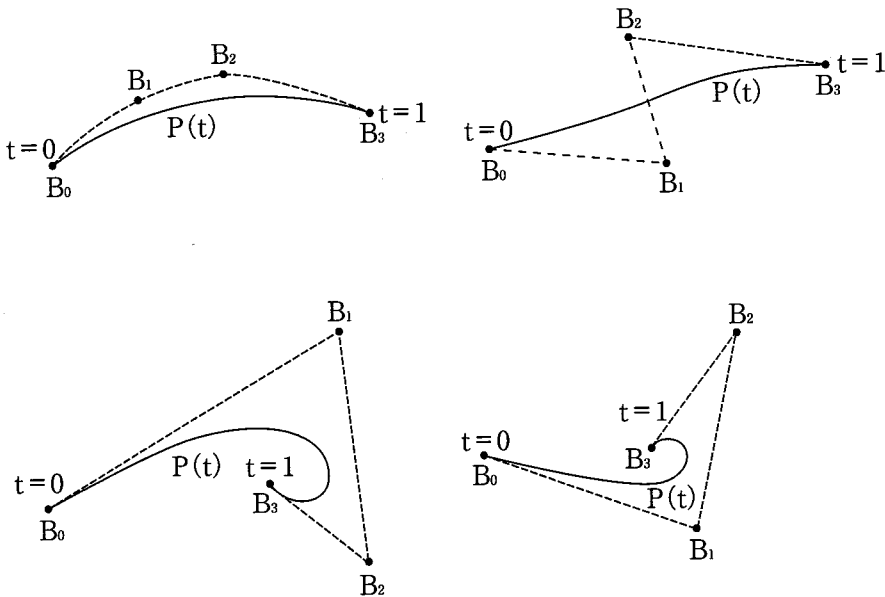


図1 3次 Bézier 曲線

ベジエ曲線は、制御点間を直線で結んでできるポリゴンに似ている。スタートポイントとエンドポイントは必ず通過し、その間は制御点によって滑らかに変化する。この性質は次数 n が大きくなっても保たれる。

ベジエ曲線上の点 P(t) は、制御点 P_i の加重平均として定義される。ベジエ曲線はまた、さまざまな

次数で定義できる。たとえば、3次のベジエ曲線は4個の制御点が必要である。3次のベジエ曲線の場合は次式で表すことができ、図1のような形状をとる。

$$P(t) = B_0 J_{3,0}(t) + B_1 J_{3,1}(t) + B_2 J_{3,2}(t) + B_3 J_{3,3}(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} J_{3,0}(t) &= (1-t)^3 \\ J_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ J_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) \\ J_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (5)$$

をとり、4点 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 は制御点である。

ベジエ曲線は文字の輪郭線を数式として表現するアウトラインフォントにしばしば用いられている。

ここで、頂点 B_0 [1 1]、 B_1 [2 3]、 B_2 [5 3]、 B_3 [4 1]の Bézier 多角形を与えて、Bézier 曲線上の7点を求める計算例を示す。

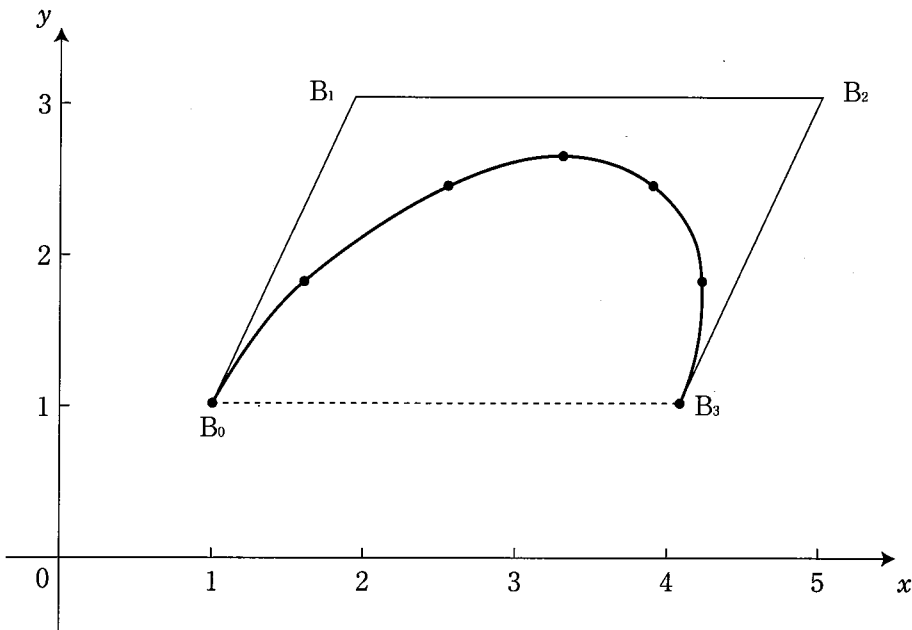


図2 Bézier 曲線計算例

式(3)より $n = 3$ 。

すなわち、
$$\binom{n}{i} = \binom{3}{i} = \frac{6}{i!(3-i)!}$$

したがって、

$$\begin{aligned} P(t) &= B_0 J_{3,0}(t) + B_1 J_{3,1}(t) + B_2 J_{3,2}(t) + B_3 J_{3,3}(t) \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \end{aligned}$$

である。変数 t に対する J_{ni} の値を表1に示す。

表1 Bézier 曲線の係数($n=3$)

t	$J_{3,0}$	$J_{3,1}$	$J_{3,2}$	$J_{3,3}$
0	1	0	0	0
0.15	0.614	0.325	0.058	0.003
0.35	0.275	0.444	0.239	0.043
0.5	0.125	0.375	0.375	0.125
0.65	0.043	0.239	0.444	0.275
0.85	0.003	0.057	0.325	0.614
1	0	0	0	1

曲線上の各点は次のようにして得られる。

$$P(0) = B_0 = [1 \ 1]$$

$$\begin{aligned} P(0.15) &= 0.614B_0 + 0.325B_1 + 0.058B_2 + 0.003B_3 \\ &= 0.614[1 \ 1] + 0.325[2 \ 3] + 0.058[5 \ 3] + 0.003[4 \ 1] \\ &= [0.614 \ 0.614] + [0.65 \ 0.975] + [0.29 \ 0.174] + [0.012 \ 0.003] \\ &= [1.566 \ 1.766] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0.35) &= 0.275B_0 + 0.444B_1 + 0.239B_2 + 0.043B_3 \\ &= 0.275[1 \ 1] + 0.444[2 \ 3] + 0.239[5 \ 3] + 0.043[4 \ 1] \\ &= [0.275 \ 0.275] + [0.888 \ 1.332] + [1.195 \ 0.717] + [0.172 \ 0.043] \\ &= [2.53 \ 2.367] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0.5) &= 0.125B_0 + 0.375B_1 + 0.375B_2 + 0.125B_3 \\ &= 0.125[1 \ 1] + 0.375[2 \ 3] + 0.375[5 \ 3] + 0.125[4 \ 1] \\ &= [0.125 \ 0.125] + [0.75 \ 1.125] + [1.875 \ 1.125] + [0.5 \ 0.125] \\ &= [3.25 \ 2.5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0.65) &= 0.043B_0 + 0.239B_1 + 0.444B_2 + 0.275B_3 \\ &= 0.043[1 \ 1] + 0.239[2 \ 3] + 0.444[5 \ 3] + 0.275[4 \ 1] \\ &= [0.043 \ 0.043] + [0.478 \ 0.717] + [2.22 \ 1.332] + [1.1 \ 0.275] \\ &= [3.84 \ 2.367] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0.85) &= 0.003B_0 + 0.057B_1 + 0.325B_2 + 0.614B_3 \\ &= 0.003[1 \ 1] + 0.057[2 \ 3] + 0.325[5 \ 3] + 0.614[4 \ 1] \\ &= [0.003 \ 0.003] + [0.114 \ 0.171] + [1.625 \ 0.975] + [2.456 \ 0.614] \\ &= [4.198 \ 1.763] \end{aligned}$$

$$P(1) = B_3 = [4 \ 1]$$

図2に定義多角形とセグメントの結果を一緒に示す。

つづいて Bézier 曲線の1階と2階の導関数について実証する。

実証する対象データは、4頂点の Bézier 多角形の導関数である。Bézier 曲線は(4)式によって与えられるから、1階の導関数は次のようになる。

$$P'(t) = B_0 J'_{3,0}(t) + B_1 J'_{3,1}(t) + B_2 J'_{3,2}(t) + B_3 J'_{3,3}(t) \quad (6)$$

(5)式の基底関数を微分すると

$$\begin{aligned}
 J'_{3,0}(t) &= -3(1-t)^2 \\
 J'_{3,1}(t) &= 3(1-t)^2 - 6t(1-t) \\
 J'_{3,2}(t) &= 6t(1-t) - 3t^2 \\
 J'_{3,3}(t) &= 3t^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

よって、 $t=0$ においては $P'(0) = 3(P_1 - P_0)$ となり、曲線の始点での接線ベクトルの方向は多角形の第1スパンと同じ方向である。

曲線の終点 $t=1$ においては次式が得られる。

$$P'(1) = 3(P_3 - P_2). \tag{8}$$

基底関数の1階および2階の導関数は、(2)式から

$$J'_{ni}(t) = \frac{(i-nt)}{t(1-t)} J_{ni}(t) \tag{9}$$

$$J''_{ni}(t) = \left\{ \frac{(i-nt)^2 - nt^2 - i(1-2t)}{t^2(1-t)^2} \right\} J_{ni}(t) \tag{10}$$

となる。

(7)式を(1)式の1階の導関数である $P'(t) = \sum_{i=0}^n B_i J'_{ni}(t)$ に代入すると

$P'(0)$ 、 $P'(1)$ と同様に $P'(\frac{1}{2})$ では

$$\begin{aligned}
 P'(\frac{1}{2}) &= B_0 J'_{3,0}(\frac{1}{2}) + B_1 J'_{3,1}(\frac{1}{2}) + B_2 J'_{3,2}(\frac{1}{2}) + B_3 J'_{3,3}(\frac{1}{2}) \\
 &= -3(1-\frac{1}{2})^2 B_0 + 3(1-\frac{3}{2})(1-\frac{1}{2}) B_1 + \frac{3}{2}(2-\frac{3}{2}) B_2 + 3(\frac{1}{2})^2 B_3 \\
 &= -\frac{3}{4}(B_0 + B_1 - B_2 - B_3)
 \end{aligned}$$

となり、曲線上のすべての点での1階導関数を求めることができる。同様に、2階の導関数についても

$$J''_{3,0}(t) = 6(1-t), \quad J''_{3,1}(t) = -6(2-3t), \quad J''_{3,2}(t) = 6(1-3t), \quad J''_{3,3}(t) = 6t$$

で与えることができるから、

$$\begin{aligned}
 P''(t) &= \sum_{i=0}^n B_i J''_{ni}(t) \\
 &= B_0 J''_{3,0}(t) + B_1 J''_{3,1}(t) + B_2 J''_{3,2}(t) + B_3 J''_{3,3}(t) \\
 &= 6(1-t)B_0 - 6(2-3t)B_1 + 6(1-3t)B_2 + 6tB_3
 \end{aligned}$$

となる。

ここで、図2で示した4頂点の Bézier 曲線計算でのデータである B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 に対する1階および2階の導関数を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P'(1) &= -3B_2 + 3B_3 = -3[5 \ 3] + 3[4 \ 1] = [-3 \ -6] \\
 P'(0) &= -3B_0 + 3B_1 = -3[1 \ 1] + 3[2 \ 3] = [3 \ 6] \\
 P'(\frac{1}{2}) &= -\frac{3}{4}(B_0 + B_1 - B_2 - B_3) \\
 &= -\frac{3}{4}\{[1 \ 1] + [2 \ 3] - [5 \ 3] - [4 \ 1]\} = [4.5 \ 0] \\
 P'(\frac{1}{3}) &= -\frac{4}{3}B_0 + B_2 + \frac{1}{3}B_3 = -\frac{4}{3}[1 \ 1] + [5 \ 3] + \frac{1}{3}[4 \ 1] = [5 \ 2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(\frac{4}{5}) &= -\frac{1}{25}(3B_0 + 21B_1 + 24B_2 - 48B_3) = -\frac{3}{25}(B_0 + 7B_1 + 8B_2 - 16B_3) \\ &= -\frac{3}{25}\{[1 \ 1] + 7[2 \ 3] + 8[5 \ 3] + 16[-4 \ -1]\} \\ &= -\frac{3}{25}[-9 \ 30] = [1.08 \ -3.6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(\frac{9}{10}) &= -\frac{3}{100}(B_0 + 17B_1 + 63B_2 - 81B_3) \\ &= -\frac{3}{100}\{[1 \ 1] + 17[2 \ 3] + 63[5 \ 3] + 81[-4 \ -1]\} \\ &= -\frac{3}{100}\{[26 \ 160]\} = [-0.78 \ -4.8] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(\frac{99}{100}) &= -\frac{3}{10000}(B_0 + 197B_1 + 9603B_2 - 9801B_3) \\ &= -\frac{3}{10000}\{[1 \ 1] + 197[2 \ 3] + 9603[5 \ 3] + 9801[-4 \ -1]\} \\ &= -\frac{3}{10000}[9206 \ 19600] = [-2.7618 \ -5.88] \end{aligned}$$

$P''(t)$ の $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ の値に対しては、それぞれ

$$P''(0) = [6 \ -12], \quad P''(\frac{1}{2}) = [-6 \ -12], \quad P''(1) = [-18 \ -12]$$

となる。

2階の導関数 $P''(t)$ に対する結果も図3に示す。

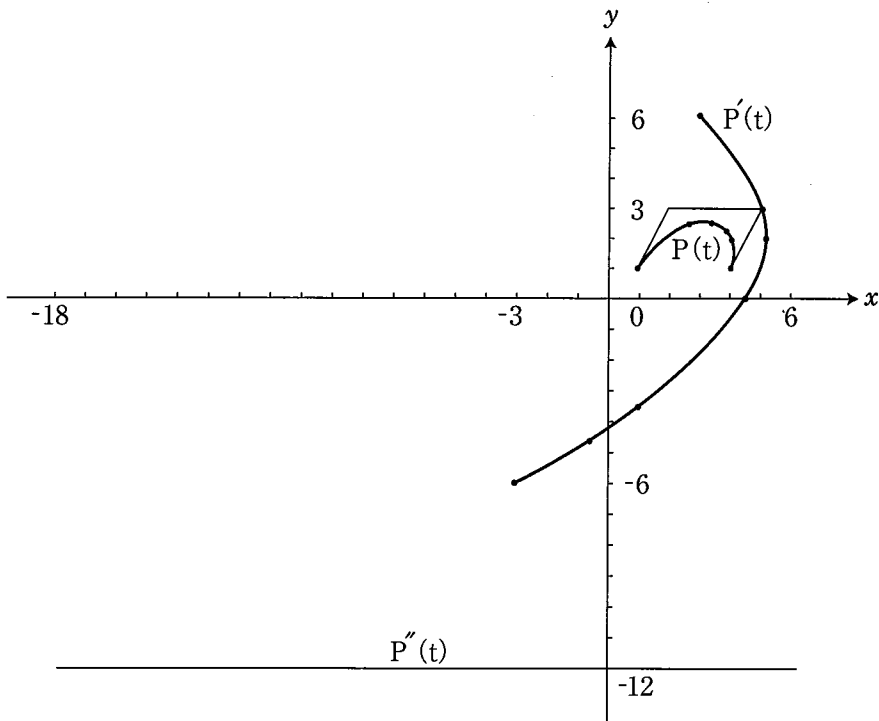


図3 Bézier 曲線と導関数 ($P(t)$, $P'(t)$, $P''(t)$)

2.2.2 B-spline 曲線

B-スプライン曲線(B-spline curve)は、スプライン曲線の一種で制御点方式にもとづく表現形式の

曲線である。制御点により曲線形状制御ができるというベジエ曲線と同様の特徴を持ちながら、スプライン曲線のように曲線の歪みエネルギーを最小となるように形状の制御ができる。

B-スプラインの理論は、1946年 Schoenberg によって提案され、1974年には Gordon と Riesenfeld がB-スプライン基底関数を曲線の定義に応用した。

B-スプライン曲線もベジエ曲線と同じ形式で定義される。

パラメータ t の関数で表される曲線にそった位置ベクトルを $P(t)$ とすると、B-スプライン曲線は次式で表される。

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (11)$$

ここで、 B_i は $n+1$ 個の定義多角形頂点の位置ベクトル、また $N_{i,k}$ は正規化されたB-スプライン基底関数である。

k 階 ($k-1$ 次) の i 番目の正規化されたB-スプライン基底関数に対して、その基底関数 $N_{i,k}(t)$ は、Cox-deBoor の帰納式によって定義される。すなわち、

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t < x_{i+1} \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{および、} N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \quad (13)$$

ここで、 x_i の値は、 $x_i \leq x_{i+1}$ の関係を満たすノットベクトル(knot vector)の要素であり、 k は階数、 $k-1$ は次数、 B_i は制御点である。

ノットベクトルには、次の3つの型がある。すなわち、ノットベクトルが等差数列になっている場合の一律なノットベクトル (uniform knot vector)、ノットベクトルが両端で階数だけ重複している場合の開一律ノットベクトル (open uniform)、以上2つの分類にあてはまらないノットベクトルの形式である場合の非一律ノットベクトル (non-uniform knot vector) である。

開一律ノットベクトルは、端点(始終端)でB-スプライン基底関数の階数 k に等しい数の同じ値を持つノットを有する。

定義多角形頂点の数がB-スプライン基底関数の階数に等しく、かつ開一律なノットベクトルが用いられたとき、B-スプライン基底関数は Bernstein 基底関数と等価である。したがって、 k 個の0の後に k 個の1が続くノットベクトル

$$T = (0, 0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1, 1)$$

に対応するB-スプライン曲線は、Bézier 曲線と一致する。実際、4階の開一律ノットベクトルは

$$T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

であるから、3次 Bézier 曲線が結果として生成される。

3 おわりに

制御点にもとづく自由曲線の表現式である Bézier 曲線について考察した。

本稿では Bézier 曲線は、生成される曲線形状が制御点の近くにあり、曲線形状の凹凸が制御点配置の凹凸から予測可能、曲線セグメントの接続性が制御点間の曲線形状として把握しやすいことを機能性の面

から確認した。それらの中でも2次元ドロー系ソフトで使われている Bézier 曲線は、4個の制御点からなる3次 Bézier 曲線セグメントの連結体としたものとなっている。4個の制御点を与えると Bézier 曲線は始点と終点を通り、開いたポリゴンの中に収まる。このことはこの曲線が制御性に優れていることを意味している。B-スプライン曲線も制御点をもとに生成され、開いたポリゴンの形状を反映している。B-スプライン曲線の階数がポリゴンの頂点の数と等しいとき、B-スプライン基底関数は Bernstein基底関数と等しくなることが証明できる。その結果として生成される B-スプライン曲線は、Bézier 曲線に等しくなる。実際、次数4の B-スプライン線は3次の Bézier 曲線と等しくなっている。

(2000. 9. 28 受理)

参考文献

- 1) 中島正之、安居院猛『コンピュータグラフィックス』昭晃堂、1998年
- 2) 中前栄八郎『コンピュータグラフィックス』オーム社、1995年
- 3) 川合慧『基礎グラフィックス』昭晃堂、1998年
- 4) 川合慧監訳『コンピュータグラフィックス』日刊工業新聞社、1997年
- 5) 市田浩三、吉本富士市『スプライン関数とその応用』教育出版、1994年
- 6) 桜井明編著『スプライン関数入門』東京電機大学出版局、1997年
- 7) 黒瀬能肇『3次元図形処理工学』、共立出版、1999年
- 8) 東正毅、斎藤剛、久志本琢也訳『CAD / CAM における曲線曲面のモデリング』東京電機大学出版局、1996年
- 9) 井上秀彦、柴田幸夫、金谷健一「擬似エネルギー最小化に基づく3次エルミート曲線」(『電子情報通信学会論文誌 D-II』 Vol.J80-D-II, No.1, pp.215-223, 1997年)