アダム・スミスにおけるv＋mのドグマ

――その数学的証明――

遠藤　潔

本稿は≪二　スミスによるv＋mの交換価値の分解≫[1]の数学的検討がその目的である。

マルクスによれば≪各個の商品……の価格または交換価値（exchangeable value）は三つの構成部分（component parts）から成るとか、或いは労働賃銀、利潤、地代に分解される（resolves itself into）というアダム・スミスの所説（ドグマ）は商品価値はv＋mに等しい、すなわち、前貸可変資本の価値プラス剰余価値に等しい、ということに約元され得る≫[2]。すなわち、スミスによれば≪第四の部分が……借地農業者の資本を補填するために、または彼の役畜及びその他の農具の磨損を補填するために、必要に見えるかもしれない。しかし、何らかの農具の価格、たとえば役馬の価格は、それ自体やはり前記の三つの部分から、すなわち、馬が飼われる土地の地代と、飼養の労働と、この土地の地代及びこの労働の賃銀の両方を前貸する借地農業者の利潤とから構成される、ということが考慮に入れられねばならない。それゆえ、穀物の価格は、馬の価格及び維持費を補塡するではあろうが、しかし、全価格はやはり直接にか、または結局において、同じ三つの部分に、地代、労働……及び利潤に分解されるのである≫[3]。すなわち、マルクスによれば≪彼（スミス）[4]は、穀物の価格はv＋mから成るのみではなく、穀物生産において消費された生産手段の価格からも、したがって、借地農業者が労働力に投じたのではない資本価値からも成る、ということを認めている。しかし、彼は言う。すべてのこれらの生産手段自体の価格も、穀物の価格と同じに、v＋mに分れる、と。ただスミスは次のように言い足すのを忘れている。更に、なおそれらの生産手段自体の生産において消費された生産手段の価格に分れる、と。彼は、一つの生産部門から他の生産部門へ、そこから更に第三の生産部門に転ずることを命ずる。商品の全価格が『直接に』かまたは『結局において』（ultimately）かv＋mに分解されるということは、次のことが論証された場合にのみ、空虚な遁辞でなくなるであろう。すなわち、その価格が直接にc（消費された生産手段の価格）＋v＋mに分解される商品生産物は、結局は、かの『消費された生産手段』をその全範囲にわたって補填し、しかもそれ自体は単なる可変資本投下、すなわち労働力に投ぜられる資本の投下によって生産される商品生産物によって、補填されるということが論証された場合である。その場合には、後の方の商品生産物の価格は直接にv＋mに等しいであろう。したがって、前の方の商品生産物の価格c＋v＋m―ここではcは不変資本部分として現われる―も、結局はv＋mに分解され得るであろう≫[5]

ではいかにしても『直接に』はv＋mに等しい価格の後の方の商品生産物を見出しえない前の方の商品生産物の価格は『結局において』(ultimately) v＋mに分解されえないであろうか？　このことの数学的検討が本稿の目的である。ところで≪各個の商品≫[6]についていえることは≪したがってまた社会の年生産物を構成する一切の商品を合せ≫[7]たものについてもいえる。

第一表

Purchases by : / Sales of :	Industry 1	Industry 2 …… Industry n
Industry 1	a_{11}	a_{12} …… a_{1n}
Industry 2	a_{21}	a_{22} …… a_{2n}
⋮	⋮	⋮
Industry n	a_{n1}	a_{n2} …… a_{nn}
Labor	a_{01}	a_{02} …… a_{0n}
Total Labor	A_{01}	A_{02} …… A_{0n}

≪二　スミスによるv＋mへの交換価値の分解≫を数学的に扱えるような簡単な解釈におきかえるとつぎのようになる。≪各個の商品の価格または交換価値≫[8]をW、c_iを不変資本、v_iを可変資本m_iを剰余価値、添字のiが小さいほど前の方の商品生産物とすれば、$W=v_0+m_0+c_0=v_0+m_0+v_1+m_1+c_1=v_0+v_1+v_2+m_0+m_1+m_2+c_2=\cdots\cdots$という形になる。ところで、≪各個の商品≫にとって≪後の方の商品生産物≫[9]は一種類づつ順次に現われるものではなく…数種類づつが同時に現われ多岐に亘るものである。且つ、そうしたものの連鎖である。そこで第一表を作成する。a_{ij}はIndustry j部門の生産物1 *artificial unit*を生産するに要するIndustry i部門の生産物量を示す。a_{0j}はIndustry j部門の生産物1 artificial unitを生産するに要するマルクスのいわゆる≪生きた労働≫(Lebendige Arbeit)を表わし、その対象化したものが、v＋mになる。したがって、≪二　スミスによるv＋mへの交換価値の分解≫は≪生きた労働≫に分解することである。A_{ij}はIndustry j部門の生産物1 *artificial unit*に含まれている総労働を表わし、マルクスのいわゆる≪生産物価値≫(Produktenwert)を示している。ここに*artificial unit*というのは、各部門の生産物一単位を生産するに要する諸要素が、つぎの条件を満足するように、同じ大いさですべての要素を除した結果（例えばQで除したのなら1/Q単位）が1 *artificial unit*である。そこで第一表の諸要素の条件は、

$$a_{ij} \geqq 0 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \qquad (2)$$

そこで第一表を用いてIndustry 1部門の生産物1 *artificial unit*の価格または交換価値を≪v＋mへ…分解≫[10]しよう。まず、最初の分解では、（これをR_1で表わし、i回目の分解はR_iで示す）R_1の欄のようになる。

	R_1	
不変資本部分	a_{11} a_{21} ⋮ a_{n1}	$\cdots a_{1n}\ a_{n1}$ $\cdots a_{2n}\ a_{n1}$ ⋮ $\cdots a_{nn} a_{n1}$
v＋m部分＝生きた労働	a_{01}	$\cdots a_{0n}\ a_{n1}$

R_2	a_{11} a_{21}	a_{11} a_{11}	a_{12} a_{22}	a_{21} a_{21}	a_{01} a_{02} a_{21}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以下つぎつぎと分解が行なわれ（R_nとなる）

その結果、分解されつくした結果としての v＋m すなわち《生きた労働》の総和は、つぎの式で表わされる。尚、R_3 以降の分解については、附表(1)を参照されたい。総和を $\bar{A}_{0j}$ で示せば、

$$\bar{A}_{0j} = a_{0j} + [a_{01}\cdots a_{0n}] \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \cdots\cdots(3)$$

$$(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{0} = E \quad とする。$$

が得られる。そこで、まずこの $\bar{A}_{0j}$ を求めて、そこからつぎの A_{0j} とを、最後に比較しよう。第一表から、諸要素の経済的意味、すなわち、《各個の商品》の《価格または交換価値》つまり《各個の商品》に含まれている総労働 A_{0j} は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ に含まれている労働と a_{0j} との和に等しい。

$$[A_{01}\ A_{02}\cdots A_{0n}] \begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1\ \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn}-1 \end{bmatrix} = -[a_{01}a_{02}\cdots a_{0n}] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

そして、(3)から $\bar{A}_{0j}$ を求めることにしよう。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss} \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} \rho_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \rho_i \end{bmatrix}$$

ρ_i は、A の固有値である。

$$|A-\lambda E| = 0$$

を求めれば、$|A-\lambda E| = 0$ から

$$(A-\lambda E)X = 0$$

で 0 でないベクトル X があるから、

$$\lambda X = AX$$

よって

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

で $\rho \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$ とすれば

$$|\lambda|\,|x_i| \leqq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| < \rho$$

よって $\rho = |x_i|$ で i をとれば $|\lambda| < 1$ である。ここで附言しておくが(2)の式で *artificial unit* を作ったが、(2)で、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$ にすることができる。そこで、A の固有値を ρ_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, s)$ とすれば、$|\rho_i| < 1$ である。

(3)を求めるために、

$$f_m(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\cdots + \lambda^m$$

とおく。

$$\sum_{k=0}^{m} A^k = f^n(A)$$
$$= f_m(TBT^{-1})$$
$$= T\, f_m(B)\, T^{-1}$$
$$= T \begin{bmatrix} f_m(B_{11}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_m(B_{ss}) \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$f_m(B_{ii}) = \begin{bmatrix} f_m(\rho_i) & \frac{1}{1!} f'_m(\rho_i) & \frac{1}{2!} f''_m(\rho_i) & \cdots\cdots & \frac{1}{(n-1)!} f_m^{(n-1)}(\rho_i) \\ & f_m(\rho_i) & \frac{1}{1!} f'_m(\rho_i) & \cdots\cdots & \frac{1}{(n-2)!} f_m^{(n-2)}(\rho_i) \\ & & f_m(\rho_i) & \cdots\cdots & \frac{1}{(n-3)!} f_m^{(n-3)}(\rho_i) \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & & \cdots\cdots \\ & & & & \cdots\cdots \\ & & & & f_m(\rho_i) \end{bmatrix}$$

(5)は、つぎのようにして証明される。Aが Jordan 標準形に変換され、その小行列をB_{ii}とすれば、

$$B_{ii} = \begin{bmatrix} \rho_i & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & \rho_i & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \rho_i & 1 \\ & & & & & \rho_i \end{bmatrix}$$

いのB_{ii}について、

$$B_{ii}^m = \begin{bmatrix} \rho_i^m & \binom{m}{1} \rho_i^{m-1} & \binom{m}{2} \rho_i^{m-2} & \cdots\cdots & \binom{m}{n-1} \rho_i^{m-n+1} \\ & \rho_i^m & \binom{m}{1} \rho_i^{m-1} & \cdots\cdots & \binom{m}{n-2} \rho_i^{m-n+2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \rho_i^m \end{bmatrix}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{1, 2\cdots\cdots k}$$

$$f(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\cdots + \lambda^k$$
$$f(B_{ii}) = E + B_{ii} + B_{ii}^2 + \cdots + B_{ii}^k$$

いいでB_{ii}^mの代りにB_{ii}^mの右辺を$f(B_{ii})$に代入すれば$f(B_{ii})$の第i行、方$(i+s)$の要素列は、つぎのようになる。

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-s)}{1, 2\cdots\cdots s} \rho_i^{m-s} = \frac{1}{1, 2\cdots\cdots s} f^{(s)}(\rho_i)$$

よって(5)が証明された。

そこで、十分大きいmに対してB_{ii}^mの各要素の大いさを求めよう。他ならぬ$\lim_{m\to\infty} f_m(\rho_i)$, ……$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} f_m^{(n-1)}(\rho_i)$を求めることである。

まず$f_m(\rho_i)$から求めていこう。

$$f_m(\rho_i) = 1 + \rho_i + \cdots\cdots + \rho_i^m$$
$$\lim_{m\to\infty} f_m(\rho_i) \frac{1}{1-\rho_i} \qquad |\rho_i| < 1$$

ところで、$\lim_{m\to\infty} f_m(\rho_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_i^m$が収束なら、項別に微分可能で、原級数と同一の収斂半径を有するから、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{1!} f'_m(\rho_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_i^{k-1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2!} f''_m(\rho_i) = \frac{1}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho_i^{k-2}$$

……

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} f_m^{(n-1)}(\rho_i) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)\rho_i^{k-n+1}$$

は収束で、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho_i^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho_i)^2}$$

$$\frac{1}{2!}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho_i^{\,k-2} = \frac{1}{(1-\rho_i)^3}$$

……

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\cdots\cdots(k-n+2)\ \rho_i^{\,k-n+1} = \frac{1}{(1-\rho_i)^n}$$

$|\rho_i| < 1$

これは、絶対収斂なる級数のコーシーの乗積級数は絶対収斂で、上述のごとくなる。

かくて、(5)の $f_m(B_{ii})$ は $m\to\infty$ のとき

$$\lim_{m\to\infty} f_m(B_{ii}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho_i} & \frac{1}{(1-\rho_i)^2} & \frac{1}{(1-\rho_i)^3} & \cdots\cdots & \frac{1}{(1-\rho_i)^{(n-1)}} & \frac{1}{(1-\rho_i)^n} \\ & \frac{1}{1-\rho_i} & \frac{1}{(1-\rho_i)^2} & \cdots\cdots & \frac{1}{(1-\rho_i)^{(n-2)}} & \frac{1}{(1-\rho_i)^{(n-1)}} \\ & & \frac{1}{1-\rho_i} & \cdots\cdots & \frac{1}{(1-\rho_i)^{(n-3)}} & \frac{1}{(1-\rho_i)^{(n-2)}} \\ & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ & & & & & \frac{1}{1-\rho_i} \end{bmatrix}$$

かくて(5)の $\sum_{k=0}^{m} A^k$ は $m\to\infty$ のとき、

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = T\begin{bmatrix} \lim_{m\to\infty} f_m(B_{11}) & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{m\to\infty} f_m(B_{ss}) \end{bmatrix} T^{-1} \quad \cdots(6)$$

(6)を(3)に代入すれば、

$$\bar{A}_{0j} = a_{0n} + [a_{01}\cdots\cdots a_{0n}]\, T \begin{bmatrix} \lim_{m\to\infty} f_m(B_{11}) & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{m\to\infty} f_m(B_{ss}) \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad \cdots(7)$$

が得られる。

T を $[t_{ij}]$ T^{-1} を $[u_{ij}]$ とおけば、$\bar{A}_{0j}$ は(7)の計算から、つぎのようになる。

$$\bar{A}_{0j} = a_{0j} + \sum_{m=1}^{l}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{0nm}t_1u_{ki}a_{ij}}{(1-\rho_1)^k} + \sum_{m=1}^{l}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{0m}t_{m1}u_{ki}a_{ij}}{(1-\rho_1)^{k-1}} +$$

$$\cdots\cdots + \sum_{m=1}^{l}\sum_{k=l}^{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{0m}t_{ml}u_{ki}a_{ij}}{(1-\rho_1)^{k-(l-1)}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sum_{m=n-s+1}^{n}\sum_{k=1}^{e}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{0m}t_{(m-s+1)}u_{(m-s+k)i}a_{ij}}{(1-\rho_s)^k} + \sum_{m=n-s+1}^{n}\sum_{k=2}^{s}\sum_{i=1}^{n}$$

$$\frac{a_{0m}t_{m(m-s+2)}u_{(m-s+k)i}a_{ij}}{(1-\rho_s)^{k-1}}$$

$$+\cdots\cdots+\sum_{m=(n-s+1)}^{n}\sum_{k=s}^{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{0m}t_{mn}u_{(n-s+k)i}a_{ij}}{(1-\rho_s)^{k=(s-1)}} \quad \cdots\cdots\cdots(7')$$

ところで、ここでは $\lim_{m\to\infty} f_m(B_{11})$ は1次、以下、$\lim_{m\to\infty} f_m(B_{ii})$ も夫々、正方小行列で、$\lim_{m\to\infty} f_m(B_{ss})$ は s 次の小行列である。以上 $\bar{A}_{0j}$ の計算においては、いくつかの重要な数学上の仮定が、前提されているがそれに触れる前に、(4)の A_{0j} を求めておこう。(4)はつぎのようであった。

$$[A_{01}\cdots A_{0n}]\begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots a_{n2} & \cdots\cdots a_{nn}1 \end{bmatrix} = -[a_{01}\cdots a_{0n}]$$

$$A-E=\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn}-1 \end{pmatrix}$$

$$A=TBT^{-1},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss} \end{pmatrix},\quad B_{ii}=\begin{pmatrix} \rho_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \rho_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A-E &= TBT^{-1}-E \\ &= TBT^{-1}-TET^{-1} \\ &= T\,(B-E)\,T^{-1} \end{aligned}$$

$$[A_{01}\cdots A_{0n}]\ (A-E) = [A_{01}\cdots A_{0n}]\ T\,(B-E)\,T^{-1}$$

$$= -\ [a_{01}\cdots a_{0n}]$$

$$[A_{01}\cdots A_{0n}]\ T\,(B-E) = -\ [a_{01}\cdots a_{0n}]\ T$$

$$[A_{01}\cdots A_{0n}]\ T = -\ [a_{01}\cdots a_{0n}]\ T\,(B-E)^{-1}$$

$$[A_{01}\cdots A_{0n}] = -\ [a_{01}\cdots a_{0n}]\ T\,(B-E)^{-1}\ T^{-1} \cdots\cdots (8)$$

そこで A_{0j} を求めれば、つぎのようになる。

T は $[t_{ij}]$ T^{-1} は $[u_{ij}]$ とする。

$$B-E=\begin{bmatrix} \rho_1-1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \rho_1-1 & & & & \\ & & & & \rho_s-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \rho_s-1 \end{bmatrix}$$

l 行　l 列　s 列　s 行

あるいは逆ごいとであるが $B-E$ の小行列

$$B_{ii}-E_{ii}=\begin{bmatrix} \rho_i-1 & 1 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \rho_i-1 \end{bmatrix}$$

そこで $(B-E)^{-1}$ を求めよう。結果を示せば、つぎのようである。

$$(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(\rho_1-1)^{l-1}} & \frac{1}{(\rho_1-1)^{l-2}} & \cdots & \frac{1}{\rho_1-1} & 1 & & & \\ & \frac{1}{(\rho_1-1)^{l-1}} & \cdots & \frac{1}{(\rho_1-1)^2} & \frac{1}{\rho_1-1} & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \frac{1}{(\rho_1-1)^{l-1}} & & & & \\ & & & & \frac{1}{(\rho_s-1)^{s-1}} & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & & & \ddots & \frac{1}{(\rho_s-1)^{s-1}} & \cdots\ \frac{1}{\rho_s-1} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & \frac{1}{(\rho_s-1)^{s-1}} \end{bmatrix}$$

l 行　l 列　s 列　s 行

あるいは逆ごいとであるが $(B-E)^{-1}$ の小行列 $(B_{ii}-E_{ii})$ を l_i 次とすれば、

$$(B_{ii}-E_{ii})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(\rho_i-1)^{l_i-1}} & \frac{1}{(\rho_i-1)^{l_i-2}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\rho_i-1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{(\rho_i-1)^{l_i-1}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\rho_i-1} & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & & \frac{1}{(\rho_i-1)^{l_i-2}} & \\ & & & \frac{1}{(\rho_i-1)^{l_i-1}} & \end{bmatrix}$$

そこで $(B-E)^{-1}$ の右辺を(8)に代入して A_{0i} を求めれば、

$$A_{0j} = -\left\{\sum_{n=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{a_{0m^l m}u_{kj}}{(\rho_1-)^{l-k}} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=2}^{l}\frac{a_{0m^l m_2}u_{kj}}{(\rho_1-1)^{l-(k-)}} + \cdots + \sum_{n=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{a_{0m^l m(n-s+1)}u_{(n-s+k)j}}{(\rho_s-1)^{s-k}} + \frac{a_{0m^l m}u_{kj}}{(\rho_1-1)^{l-(k-(l-1))}} + \cdots + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\frac{a_{0m^l m(n-s+k)}u_{(n-s+k)j}}{(\rho_s-1)^{s-k}} + \cdots + \sum_{n=1}^{n}\sum_{k=s}^{s}\frac{a_{0n^l m(n-s+s)}u_{(n-s+s)j}}{(\rho_s-1)^{s-(n-(n-s))}}\right\}$$

……(8')

以上のことから、Aのすべての要素およびa_{0j} $(j=1, 2, \cdots, n)$が分ればスミスによるv＋mへの交換価値の分解≪によって得られる(7')のA_{0j}と、≪各個の商品≫に含まれている総労働を未知数としていきなりA_{0j}とおいて得られる(8')のA_{0j}との比較の問題が残っている。実は、経済学的にはこの(7')のA_{0j}と(8')のA_{0j}との大小の比較が重要なのである。

マルクスによれば≪二　スミスによるv＋mへの交換価値の分解≫が≪空虚な遁辞でなくなる≫[11]のは≪その価格が（どこかで…筆者）直接にc（消費された生産手段の価格）＋v＋mに分解される商品生産物は、結局は、かの『消費された生産手段』をその全範囲にわたって補填し、しかもそれ自体は単なる可変資本すなわち、労働力に投ぜられる資本の投下によって生産される商品生産物によって、補填されるということが論証された場合≫[12]のみである。いいかえれば、マルクスの考えでは、その価格が『直接に』かまたは『結局において』[13]v＋mに分解されうるのは、その商品生産物の生産に消費された≪後の方≫の商品生産物が、≪後の方≫へのこうした消費された生産手段たる商品生産物の連鎖のどこかで、そこから先はもはや≪後の方≫の商品生産物、つまり生産手段として消費された≪後の方≫の商品生産物が現われなくなる。つまり≪後の方≫への遡及的な生産手段を追う旅はそこで終わり、その連鎖が途切れるところでは、≪後の方≫の一番最後にくる生産手段として、生産手段を全く用いずに労働だけで生産された商品生産物が現われる。マルクスによれば、こうした場合にだけ商品生産物はv＋mに分解されうる、というのである。ということは、いいかえればこうした都合のいい商品生産物が現われない場合、すなわち、その商品生産物の生産に消費された≪後の方≫の生産手段が、どこまでいっても、現われてくる場合、単純には$W-(v_0+v_1\cdots\cdots,(+(m_0+m_1+\cdots)$がどこまでもつづく場合は、≪商品の全価格が『直接に』かまたは『結局において』[14]v＋mに分解されるということは……完全な遁辞≫にすぎない。マルクスによれば、そうした都合のよい商品生産物に（≪後の方≫で、それも辛抱のできる有限回の遡及で）出喰わすことのない商品生産物の価格または交換価値をv＋mに分解することは、≪空虚な遁辞≫であって、≪商品価値から資本の不変的価値部分を追出そうとする≫[15]ものであり、社会の≪年生産物の不変的価値部分を追出す≫[16]ものである。いいかえれば、≪このことは、それ以前の諸年から受継がれた労働手段及び労働対象の助力≫[17]を追出すことによって≪各国民の年労働≫[18]が≪国民が一年中に消費する……すべての生活手段を各国民に本源的に給与する基本である≫[19]ことを≪不可能≫[20]ならしめることである。いいかえれば、『結局において』マルクスのいうように、都合のよい商品生産物に遭遇することなく、≪後の方≫への無限の遡及の旅をした場合に得られる結果である。(7')のA_{0j}は、そうではない(8')のA_{0j}よりも小さいであろうか？　つまり、

$$\bar{A}_{0j} < A_{0j},\ \bar{A}_{0j} = A_{0j},\ \bar{A}_{0j} > A_{0j}$$

のいずれであろうか、ということである。若しも、$\bar{A}_{0j} < A_{0j}$であれば、マルクスの主張が正しく、スミスの≪v＋mへの交換価値の分解≫の主張

は≪空虚な遁辞≫に終るだろう。ただ、$\bar{A}_{oi}$ と $\bar{A}_{oj}$ の比較にあたって $a_{ij}=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ であるような列、すなわち、労働以外にいかなる生産手段をも消費しない生産物はない。ところで、(7') の $\bar{A}_{oi}$ と (8') の $\bar{A}_{oj}$ は、相互に比較しあえる形になっており、適当な制限を加えれば、両者の大小が明かとなろう。だが、この (7') の $\bar{A}_{oi}$ と (8') の $\bar{A}_{oj}$ の比較には、まだ、いくつかの障碍がある。本稿では、むしろ $\bar{A}_{oi}$ と $\bar{A}_{oj}$ が相互に比較可能な形 ((7') と (8') のように) に変形しうるかが、まず、最初の目標であった。この目標は、その限りで達せられた。この目標を達成する限りでは、A を Jordan 標準型に変換することで十分であった。が、$\bar{A}_{oi} \wedge \bar{A}_{oj}$ を検討するには、固有値を実数にすることが必要であり、実数行列Aは実数の範囲内のみで、つぎの形に変形できるから、

$$A = T\begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_k \end{bmatrix}T^{-1}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \text{ or } B_i = \begin{bmatrix} E_2 & & 0 \\ L & \ddots & \\ 0 & L & E_2 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \mu & v \\ -v & \mu \end{bmatrix},$$

$$|\lambda E - A_2| = 0, \quad \lambda = \mu + v_i$$

これを用いて、$\bar{A}_{oi}$, $\bar{A}_{oj}$ を求めて、比較すればよい。かかる比較は、つぎの機会に譲る。

遡及を有限回に限って考えるマルクスからみれば≪空虚な遁辞≫にみえるスミスの≪v＋m≫への≪交換価値の分解≫も、これを極限の考えからみれば、決して≪空虚の遁辞≫ではない。マルクスの有限のものの考え方に対して、スミスが極限の考え方によって、同じ対象を捉えたということである。同一対象の異なる把握、すなわち、マルクスの有限的な把握に対しスミスが極限の把握をしたということである。

若しも、マルクスのいうように、『結局において』[21]、≪v＋m への交換価値の分解≫が不可能だとしたら、≪価値実体≫を≪抽象的人間労働≫[22]に≪還元≫[23]することは、いかにして可能なのであろうか？

とにかく、スミスの極限の考え方とマルクスの有限の考え方の差異に注目すべきである。同一対象の把え方の差異に注目すべきである。

尚、いうまでもないことであるが、経済学的解釈を数学的形式に移して検討することは、経済学を一層精密なものにしてくれる。

註(1) ≪資本論≫ 岩波文庫版 第二巻、第三分冊 三八頁
註(2) 上掲書 三八頁
註(3) ≪諸国民の富≫ 岩波文庫版 第一分冊 一〇五—六頁
註(4) 筆者註
註(5) ≪資本論≫ 岩波文庫版 第二巻 第三分冊 四五頁
註(6) 上掲書 三八頁
註(7) 上掲書 三八頁
註(8) 上掲書 三八頁
註(9) 上掲書 四五頁
註(10) 上掲書 三八頁
註(11) 上掲書 四五頁
註(12) 上掲書 四五頁
註(13) 上掲書 四五頁
註(14) 上掲書 四五頁
註(15) 上掲書 四三頁
註(16) 上掲書 五〇頁
註(17) 上掲書 五一頁
註(18) ≪諸国民の富≫ 岩波文庫版 第一分冊 一一頁
註(19) 上掲書 一一頁
註(20) ≪資本論≫ 岩波文庫版 第二巻 第三分冊 五一頁

附 表 (1)

(R_3)

$$a_{11}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})\cdots\cdots\cdots a_{1n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{11}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$a_{21}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})\cdots\cdots\cdots a_{2n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})\cdots\cdots\cdots a_{nn}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$a_{01}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})\cdots\cdots\cdots a_{0n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

(R_4)

$$a_{11}a_{11}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{11}a_{12}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{11}a_{1n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{11}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n}a_{n1}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{1n}a_{n2}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{1n}a_{nn}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$a_{21}a_{11}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{21}a_{12}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{21}a_{1n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n}a_{n1}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{2n}a_{n2}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{2n}a_{nn}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}a_{11}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{n1}a_{12}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{n1}a_{1n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn}a_{n1}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{nn}a_{n2}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{nn}a_{nn}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$

$$a_{21}a_{11}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{01}a_{12}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{01}a_{1n}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n}a_{n1}(a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+\cdots\cdots+a_{1n}a_{n1})+a_{0n}a_{n2}(a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}+\cdots\cdots+a_{2n}a_{n1})+\cdots\cdots+a_{0n}a_{nn}(a_{n1}a_{11}+a_{n2}a_{21}+\cdots\cdots+a_{nn}a_{n1})$$